Educación

Sección a cargo de

Luis J. Rodríguez-Muñiz

Secuencias de problemas de Fermi como actividad para introducir la modelización matemática en las aulas

por

Irene Ferrando, Lluís Albarracín, Carlos Segura y César Gallart

1. Introducción

La modelización matemática, así como su enseñanza y aprendizaje en las etapas de educación obligatorias, es un aspecto destacado en los currículos de matemáticas a nivel internacional, dada la creciente relevancia mundial del uso de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana. Hay un amplio consenso en que la modelización matemática debe desempeñar un papel importante en la enseñanza de las matemáticas, y la situación en las escuelas e institutos está cambiando progresivamente para incluir aspectos del mundo real en las aulas de matemáticas, a menudo con la modelización como forma de resolución de problemas conectados con el mundo real. Sin embargo, su inclusión en el aula como actividad habitual es aún escasa [9].

Esta situación contrasta con la madurez alcanzada en la investigación sobre modelización matemática en educación [28]. También se observa que es un tipo de actividad matemática que se ha asociado principalmente a los niveles de educación secundaria superior y universitarios, mientras que la investigación ha demostrado que los estudiantes de los niveles de primaria y cursos iniciales de secundaria también pueden trabajar eficazmente [13].

Ante esta situación, parece necesario identificar y estudiar el impacto de actividades que permitan introducir la modelización matemática en las aulas. Una propuesta en la que los autores de este artículo hemos estado trabajando intensamente es la de utilizar los denominados *problemas de Fermi*. Estos problemas plantean una pregunta en un contexto real que requiere hacer estimaciones basadas en el conocimiento de la realidad [4]. Los problemas de Fermi pueden usarse de múltiples formas en la clase de matemáticas, permitiendo que los alumnos experimenten con los principales

procesos de la modelización matemática y construyan modelos matemáticos por sí mismos [16].

En este artículo presentamos los problemas de Fermi en su contexto teórico como actividades de modelización matemática y los diversos usos que pueden hacerse de ellos en educación primaria y secundaria, sin descuidar la formación del profesorado.

2. Fundamentos teóricos

En esta sección se proporcionan los fundamentos teóricos que respaldan el uso de los problemas de Fermi como actividades de modelización matemática. En primer lugar se define el concepto de modelo matemático poniendo el foco en los aspectos educativos. Seguidamente se trata la modelización matemática como una actividad que conecta el conocimiento matemático con el mundo real. Finalmente, se definen los problemas de Fermi y se contextualizan como actividades promotoras de modelización matemática.

2.1. Modelos matemáticos

El objetivo de la modelización matemática es generar un modelo matemático que permita describir un fenómeno o una realidad concreta. Para Minsky [23], un modelo es un ente que abstrae las propiedades estructurales de un sistema y respalda la toma de decisiones necesaria ante una situación problemática, destacando la necesidad de caracterizar la estructura conceptual que sustenta el modelo. Minsky [23] formuló una definición que se fundamenta en dos elementos: un sistema conceptual y los procedimientos asociados al mismo. Ambos se expresan con distintas representaciones y están vinculados a una situación problemática. Asimismo, Lehrer y Schauble [19] entienden los modelos como sistemas conceptuales que se expresan a través de sistemas de notación externos, ya que el sistema conceptual requiere operaciones, relaciones y normas que regulan las interacciones entre ellos.

Por su parte, Velten [33] definió un modelo matemático como el triplete (S, Q, M), donde S es un sistema, Q es una pregunta relacionada con S y M es un conjunto de enunciados matemáticos que se pueden utilizar para responder Q. Por su parte, Blum y Niss [7] consideran que un modelo es el triplete (S, M, R), donde S es la situación del problema (real), M es una colección de entidades matemáticas y R las relaciones entre los elementos de S y los de M. Posteriormente, Niss [25] toma esta idea para definir un modelo matemático como un nuevo triplete (D, f, M) que incluye un dominio extramatemático D, un reino matemático M y una aplicación f (la matematización) que transforma D en M. Estos enfoques desvinculan el modelo de un problema concreto y aportan la novedad de introducir la aplicación f para materializar la idea intuitiva de un modelo como descripción matemática de la realidad.

Las ideas aportadas por Velten [33], Blum y Niss [7] y Niss [25] fueron recogidas por Czocher [12], que definió un modelo matemático como el cuarteto (S, Q, M, R), donde S es un sistema, Q es una pregunta sobre S, M es un conjunto de enunciados matemáticos que surgen para dar una respuesta a Q, y R es la relación entre los

objetos de S y M. Esta definición aportada por Czocher [12] describe los modelos matemáticos desde la perspectiva de la actividad matemática profesional y presenta dificultades para ser transferida de forma operativa a los contextos educativos. Por ello, Lesh y Harel [20] presentan los modelos matemáticos como sistemas conceptuales que pueden expresarse utilizando diferentes medios de representación que se combinan.

De esta forma, un modelo matemático puede representarse mediante lenguaje hablado, escritura alfabética o algebraica, gráficos digitales, diagramas o gráficos creados a mano o bien metáforas basadas en la experiencia. Su propósito es construir, describir o contar otro sistema o sistemas. Los modelos incluyen:

- un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos relevantes, relaciones, acciones, patrones y regularidades que son atribuibles a la situación de resolución de problemas;
- los procedimientos para acompañar construcciones útiles, manipulaciones o predicciones para conseguir con claridad los objetivos propuestos.

Los modelos matemáticos se diferencian de otros tipos de modelos generados en otras disciplinas de conocimiento debido a que el foco está en las características estructurales subyacentes de los sistemas que describen. Desarrollar modelos implica cuantificar, organizar, sistematizar, dimensionalizar, coordinar y matematizar objetos, relaciones, operaciones, patrones o normas. Este es un proceso complejo y, por tanto, para desarrollar modelos útiles se requiere una serie de ciclos de modelización que son testados y revisados repetidamente. A este proceso se le denomina modelización matemática.

2.2. Modelización matemática

La modelización matemática como área de investigación en el campo de la educación matemática empezó con el trabajo de Pollak [27], que presentó un primer marco teórico en el que interpretaba la modelización matemática como un proceso que navega entre dos dominios diferenciados: el dominio matemático, por un lado, y el resto del mundo, por otro. Esta separación lleva de forma natural al proceso de matematización de un fenómeno, como un proceso en el que se pasa de la realidad al dominio matemático, y a la interpretación en el contexto real de los modelos generados durante el trabajo en el dominio matemático, como forma de validación del modelo matemático generado.

La modelización matemática es un proceso de resolución de un problema real en el que intervienen conceptos, métodos y resultados matemáticos de forma conjunta [7]. Por eso, los objetos, los datos y las relaciones que se dan en la realidad se trasladan al mundo de las matemáticas en un proceso conocido como *matematización horizontal*, obteniendo así un modelo matemático. A continuación, se aplican los métodos matemáticos que conforman este modelo para llegar a una solución propia de los dominios matemáticos, en un proceso conocido como *matematización vertical*. Esta solución debe ser interpretada y validada en el mundo real donde se enmarca el problema, dando lugar a una solución real (de nuevo, matematización horizontal).

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos matemáticos en procesos de resolución de problemas para describir fenómenos o realizar predicciones es objeto de discusión y existen diferentes posiciones teóricas al respecto. Por lo general, en la literatura se acepta que los procesos de modelización matemática se van sucediendo en ciclos en los que se mejora el modelo generado [6]. Aunque existen diversas formas de concretar la estructura de un proceso de modelización, se entiende que se puede dividir en diferentes fases que los alumnos recorren progresivamente.

La modelización matemática es de gran importancia para la vida actual y futura de los estudiantes. En el capítulo dedicado a las matemáticas en las etapas obligatorias [21] del *Libro blanco de las matemáticas*, coordinado por la Real Sociedad Matemática Española, se argumenta que la educación matemática tiene el compromiso de apostar por modelos formativos que apoyen una enseñanza matemática compatible con la interdisciplinariedad, de forma que el conocimiento matemático surja como respuesta a problemas que se plantean asociados a las ciencias, la tecnología y la ingeniería. En este sentido, la modelización es una destreza inherente a este tipo de modelos educativos, por lo que debe promocionarse el trabajo con tareas de modelización en las aulas de la enseñanza obligatoria.

2.3. Problemas de Fermi como actividades de modelización matemática

Los problemas de Fermi son un tipo de problemas abiertos que implican realizar estimaciones aproximadas, pero fundamentadas, de cantidades de magnitud, a menudo basadas en datos incompletos. Reciben su nombre por Enrico Fermi, quien los usaba en sus clases de física para mostrar el poder del razonamiento deductivo y como preparación para el trabajo experimental en el laboratorio de física. Ärlebäck [4, p. 331] describe los problemas de Fermi como «problemas abiertos, no estándares, que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación del problema y estimen cantidades relevantes antes de realizar, a menudo, cálculos sencillos». En su enunciado se lanzan preguntas abiertas sin proporcionar datos específicos. Por lo tanto, su resolución a menudo implica descomponer el problema original en diversos subproblemas más sencillos para llegar a una solución mediante conjeturas fundamentadas y estimaciones razonadas [10]. Desde el punto de vista de la investigación en educación matemática se ha observado que la estructura de la resolución de un problema de Fermi se puede interpretar como un modelo matemático [4, 2].

Un ejemplo de problema de Fermi es estimar el número de macarrones que contiene un paquete de un kilogramo. Este problema puede parecer anecdótico, pero implica generar un modelo de distribución de objetos en el espacio y combinarlo con experimentos diseñados a propósito que permitan obtener información válida del mundo real. Otros ejemplos de problemas de Fermi pueden ser la estimación de la cantidad de gente que cabe en una plaza en las fiestas de la ciudad, el tiempo necesario para ir andando desde Zaragoza a Santiago de Compostela, o la cantidad de profesores de matemáticas necesarios en un país.

Los problemas de Fermi se caracterizan por ser una actividad que requiere la simplificación y matematización de la realidad, promoviendo que los estudiantes generen modelos matemáticos a partir de su conocimiento previo del mundo real.

Habitualmente se ejemplifica el método de resolución de un problema de Fermi con el problema del afinador de pianos, en el que se solicita estimar el número de afinadores de piano que hay en Chicago. La resolución se basa en conjugar diversas informaciones, como el volumen de trabajo anual de un afinador con la demanda potencial de afinar pianos en una ciudad. En este artículo vamos a usar un problema de corte más moderno. En concreto, ¿cuánto valdría el patrocinio por *naming* de mi casa?

Para obtener un valor aproximado es necesario conocer información publicada sobre algún patrocinio por *naming* que pueda ser referencia. En este caso usaremos la información publicada del patrocinio del estadio de fútbol en el que juega habitualmente el Atlético de Madrid, que firmó un contrato con la empresa Civitas en 2022 por un valor de 50 millones de euros por un periodo de cinco años[1].

Primera parte: ¿cuánto vale un impacto publicitario? Un año de *naming* del Civitas Metropolitano son 10 millones de euros, también sabemos que los partidos de La Liga los ven unos 1600 millones de personas en el mundo[2]. Por el hecho de seguir la competición, podemos estimar que cada persona de esta audiencia tiene un impacto publicitario cada semana del nombre del Civitas Metropolitano. Dividiendo, obtenemos que cada impacto publicitario supone un valor de 0,00012 euros.

Segunda parte: ¿cuántos impactos puedo generar yo en un año con el patrocinio de mi casa? Yo, como profesor universitario que imparte docencia a grupos numerosos y que atiende a diversos congresos cada año, hablo de mi casa-patrocinio con unas 1000 personas y puedo impactar 10 veces al año en cada una de ellas. De esta forma, el *naming* de mi casa valdría 1,20 euros al año.

Esta resolución muestra cómo se establecen dos subproblemas distintos y se usa información del mundo real para obtener la estimación final. El proceso de resolución propuesto por Fermi originalmente se basaba en trabajar exclusivamente a partir de estimaciones y tratando de conseguir precisión hasta el orden de magnitud. Establecer los subproblemas adecuados y conseguir los resultados parciales a partir de conocimiento sobre el mundo real no es un proceso sencillo. De hecho, las inteligencias artificiales generativas muestran dificultades para proporcionar resoluciones de problemas de Fermi a partir de este proceso [22]. En las implementaciones actuales se promueve que los estudiantes consigan la información necesaria de diferentes formas, ya sea a partir de estimaciones basadas en su propio conocimiento del mundo real, buscando información en fuentes originales o bases de datos, haciendo estudios estadísticos o por experimentación directa [5].

Basándose en las premisas del proceso de modelización mencionadas, los problemas de Fermi se han mostrado eficaces para iniciarse en actividades de modelización. El contexto en el que se formulan los problemas de Fermi es un aspecto clave del proceso de modelización. Estos problemas demandan estimaciones de cantidades implicadas en una situación de la vida real, lo que requiere la comprensión de los conceptos matemáticos necesarios para construir modelos, en lugar de recordar y aplicar

[1] https://www.palco23.com/clubes/atletico-de-madrid-vende-a-civitas-el-naming-del-metropolitano-por-cincuenta-millones

[2] https://lapublicidad.net/mas-de-1-600-millones-de-aficionados-forman-la-audiencia-internacional-de-la-liga/

hechos y procedimientos conocidos [2]. Aunque la resolución puede ser individual, el trabajo en grupo mejora la calidad de los modelos generados por los estudiantes. En el caso de los problemas de Fermi, las discusiones en grupo pueden promover la incorporación de nuevos supuestos o de múltiples estrategias de estimación [4].

3. Usos de los problemas de Fermi en cada etapa educativa

En esta sección se detallan los usos de los problemas de Fermi como actividades de modelización matemática en las etapas de educación primaria y secundaria. También se incluye un apartado específico para su uso en la formación del profesorado.

3.1. Educación primaria

En la etapa de educación primaria, los problemas de Fermi son, por su accesibilidad, idóneos para el desarrollo de la competencia en resolución de problemas y en modelización, así como para introducir, progresivamente, conceptos y procedimientos más o menos complejos relativos a los sentidos numéricos y de la medida.

En Pla-Castells *et al.* [26] se presentan los resultados de una experiencia desarrollada con estudiantes de segundo curso de educación primaria. Las actividades se enmarcan en un contexto real y cercano a los estudiantes, de esta forma se pretende que sean accesibles y que se puedan abordar usando diferentes estrategias de resolución, fomentando así la flexibilidad [17]. El punto de partida de la secuencia didáctica plantea una cuestión que, a priori, los estudiantes son incapaces de abordar: «¿hay suficientes habitantes en el municipio para poder realizar una cadena humana que rodee el pueblo?». La intención de empezar con esta cuestión que es, para este alumnado, inabordable, es que los estudiantes observen, al completar la secuencia, que una cuestión compleja puede simplificarse resolviendo problemas similares a una escala menor. En este sentido, el diseño de la actividad también contribuye a introducir el uso de heurísticos para la resolución de problemas.

La experiencia se desarrolla durante seis sesiones de clase, a lo largo de las cuales los estudiantes, a partir de una pregunta inicialmente inabarcable, van resolviendo en pequeños grupos problemas primero muy sencillos (estimar el perímetro de una mesa a partir de una unidad de medida física dada) y progresivamente más complejos (estimar el número de niños necesario para rodear una parte del patio y luego un parque cercano a la escuela). Todas las cuestiones ponen en juegos procedimientos relativos al concepto de perímetro, pero también procedimientos aritméticos relacionados con el razonamiento proporcional (al establecer equivalencia entre diferentes unidades de medida no formales o usar escalas). La experiencia termina con la resolución de la cuestión inicial que, además, se validó haciendo uso de las herramientas de Google Maps.

Otro ejemplo es el proyecto estudiado en Albarracín [1], cuyo objetivo es estimar la población de la ciudad en la que viven los alumnos, así como la población de un pueblo cercano, para compararlos cuantitativamente y dar significado a las cantidades que surgen durante el proyecto. Para resolver un problema de Fermi es necesario descomponer el problema original en subproblemas y resolverlos por separado. Este

proceso supone un reto para los alumnos de educación primaria, en especial para los del primer ciclo. Por ello, para los alumnos entre 6 y 8 años se propone trabajar con problemas de Fermi a modo de proyectos matemáticos en los que el docente asume la responsabilidad de estructurar los subproblemas a resolver.

Para calcular la población de la ciudad, la actividad comenzó con la pregunta «¿cuántas personas viven en mi calle?». Los alumnos decidieron recoger información sobre el tipo de edificios de la calle en la que vivían, así como el número y la cantidad de viviendas de cada edificio. La maestra preparó un documento de recogida de datos siguiendo los acuerdos de los alumnos y estos aprovecharon los viajes de ida y vuelta al centro escolar para recoger la información requerida. En la siguiente sesión discutieron sobre el número de personas que viven en una vivienda común y sobre cómo utilizar diversas estrategias para estimar el número total de personas que viven en cada una de las calles. Tras el trabajo grupal, cada alumno trabajó individualmente utilizando sus propios datos. Con este proceso se resuelve el subproblema «¿cuántas personas viven en mi calle?», que da lugar al siguiente: «¿cuántas personas viven entre todas las calles de los alumnos de la clase?». Cuando se determina el número total de vecinos de todos, los alumnos discuten si este es un valor cercano al de toda la ciudad. La maestra se encarga de proponer Google Maps como herramienta para representar las calles en las que viven los alumnos de la clase y comparar visualmente esta representación con la de toda la ciudad. Esto se hace imprimiendo el mapa de la ciudad y marcando en un papel con marcador fluorescente las calles en las que viven los alumnos. Esto proporciona una información visual que permite establecer la fracción de calles en las que viven los alumnos de la clase respecto al total, con lo que se puede obtener una estimación razonada de la población de la ciudad.

La siguiente actividad del proyecto se centra en estimar el número de personas que viven en un pueblo cercano, usando Google Street View para estimar el número de personas que viven en cada calle como paso previo a la estimación de la población total del pueblo. Se sigue el mismo proceso que en la estimación de la población de la ciudad y se pone el foco en las diferencias. Durante el trabajo los alumnos ponen en marcha procesos de resolución guiados mientras van dando significado a las cantidades que aparecen.

Por su parte, los alumnos de los cursos superiores de educación primaria pueden enfrentarse por ellos mismos a la resolución de problemas de Fermi sencillos. Es conocido que los problemas de aula con contextos reales no sustituyen la toma de decisiones en el mundo real, pero su uso en las aulas promueve actitudes que pueden utilizarse en la vida cotidiana. Por ello los problemas propuestos en esta etapa se basan en la estimación de grandes cantidades ambientados en contextos cercanos, como puede ser el propio centro escolar. Un ejemplo es estimar la cantidad de personas que caben en el patio del centro si organizamos una fiesta con las familias.

La propuesta de aula se basa en trabajar grupalmente y desplazarse físicamente a los espacios en los que se contextualizan los problemas para poder experimentar *in situ* y mejorar los procesos de resolución y obtención de datos. Hemos observado que los estudiantes generan sus propios modelos matemáticos, entre los que destaca el uso de la regla del producto, basado en la distribución en cuadrícula de objetos, que parece la forma predominante de enfrentarse a este tipo de problemas para los

alumnos de educación primaria, aunque también desarrollan modelos basados en la iteración de una unidad [14].

3.2. Educación secundaria

En la educación secundaria podemos diseñar diferentes secuencias de problemas de Fermi en función de los objetivos que queremos alcanzar con los estudiantes: por un lado, podemos variar las características de los objetos a estimar en los problemas para promover el uso de distintas estrategias de resolución; por otro lado, podemos variar los contextos manteniendo la estructura matemática de los problemas para trabajar la validación (que es posible realizar en la propia realidad en contextos accesibles) y la generalización y reutilización de modelos. Pasemos a continuación exponer estas dos perspectivas.

3.2.1. Secuencias de problemas basados en la variación de las características de los objetos

En Albarracín y Gorgorió [2] se caracterizan las estrategias de resolución de problemas de Fermi por parte de estudiantes de secundaria a problemas que involucran la estimación de grandes cantidades de objetos necesarios para llenar un espacio determinado. Las principales estrategias identificadas y que consistentemente se han seguido observando en estudios posteriores son las siguientes:

- Recuento exhaustivo: el alumno propone contar uno a uno todos los elementos del grupo de objetos.
- Fuente externa: el alumno traslada la responsabilidad de responder al problema a un tercero, que supuestamente dispone de la información necesaria.
- Densidad: el alumno basa su resolución en razonar a partir de una estimación de la densidad, entendida como un valor estimado del número de elementos que ocupan una unidad fijada previamente. Así, a partir de esta estimación de la densidad (elementos/unidad) es posible deducir el número de elementos multiplicando la densidad por la medida total.
- Iteración de una unidad: el alumno intenta determinar el número de objetos calculando el área de la superficie total ocupada del lugar donde se encuentran las personas u objetos y dividiéndola por la superficie que ocupa un solo elemento.
- Distribución en cuadrícula: el alumno utiliza una imagen mental de la distribución de objetos ordenados regularmente, después estima el número total de objetos que se encuentra en cada fila y/o columna y, por último, aplica la regla del producto para establecer el resultado si se trata de una distribución en más de una dimensión.

Algunas de estas estrategias no permitirán al estudiante resolver el problema, como es el caso del recuento exhaustivo, imposible en la mayoría de casos en los que se estima una gran cantidad. Otras, como la densidad, la iteración de la unidad o la

distribución en cuadrícula, suponen modelos matemáticos que pueden ser utilizados de forma efectiva en otras situaciones.

Por ejemplo, dentro de los problemas de estimación de objetos en el plano, ante el problema de calcular la cantidad de briznas de hierba que puede haber en un determinado recinto (como un pequeño parterre situado en el propio instituto), el alumno puede plantearse cualquiera de estas estrategias de resolución, pero utilizar una estrategia basada en la densidad parece la más adecuada dado el tipo de objeto que se pretende cuantificar. Por el contrario, si se pide calcular el número de baldosas que cubren una zona (como un pasillo o un aula), dada la distribución regular que pueden tener estas baldosas, la mejor estrategia sería la de cuadrícula. Si pedimos calcular el número de personas que caben en el patio, estrategias como la densidad (estimando el número de personas que caben de manera holgada en un metro cuadrado) o la iteración de la unidad (estimando lo que ocuparía una única persona), podrían ser estrategias factibles. Del mismo modo, una estrategia basada en la iteración de la unidad podría ser la más efectiva a la hora de calcular el número de coches que pueden aparcar en un descampado. Así, podríamos proponer una secuencia de problemas de Fermi a nuestros alumnos basada en la variación del objeto a estimar, manteniendo el mismo contexto cercano en todos ellos, el del propio instituto:

- Problema A1: ¿Cuántas baldosas recubren el suelo de tu clase?
- Problema A2: ¿Cuánta gente cabe en el patio de tu instituto?
- Problema A3: ¿Cuántos coches pueden aparcar en el descampado que hay al lado del instituto?
- Problema A4: ¿Cuántas briznas de hierba hay en el jardín del instituto?

Entendemos que estas variaciones en las características de los objetos son parte de las variables contextuales del problema [15] y pueden servirnos para promover el planteamiento de diferentes estrategias.

Otros ejemplos de problemas en los que tenemos en cuenta los objetos involucrados serían estimar el número de gotas necesarias para llenar un vaso; el número de monedas que caben en la caja fuerte de un banco; el número de canicas que caben en un tarro; o las naranjas que caben en una caja de frutas. Todos estos problemas tienen la misma estructura matemática (un elemento que se repite debe ocupar todo un volumen), pero los objetos a estudiar (gota, moneda, canica o naranjas) ocupan de forma diferente el espacio y se colocan entre ellos de forma distinta. Por ejemplo, las gotas no tienen una forma definida y se fusionan llenando totalmente el recinto acotado, las monedas son cilindros achatados y las canicas tienen forma de esfera, pero en ambos casos no es posible completar totalmente el recinto acotado. Si el enunciado se refiere a una moneda concreta (de 1 céntimo, por ejemplo) todos los objetos tendrán la misma forma y volumen, al igual que en el caso de las canicas. En el caso de las naranjas, podemos idealizar su forma a una esfera, pero tienen diferentes tamaños. Además, las monedas pueden disponerse por *capas* en el plano (aunque sin recubrir completamente ese plano) mientras que las canicas y las naranjas no pueden distribuirse de esta manera. De esta forma, presentando al grupo clase

un frasco grande de conservas (del que pueden tomar sus medidas) y posteriormente una caja (de las que se utilizan para guardar fruta), propondríamos la siguiente secuencia de problemas basados en la estimación de distintos objetos en el espacio:

- Problema B1: ¿Cuántas monedas de un céntimo caben en el frasco?
- Problema B2: ¿Cuántos lacasitos caben en el frasco?
- Problema B3: ¿Cuántas canicas caben en el frasco?
- Problema B4: ¿Cuántas gotas de agua necesitamos para llenar de agua el frasco?
- Problema B5: ¿Cuántas naranjas caben en la caja de frutas?

3.2.2. Secuencias de problemas basados en la variación del contexto

Como hemos visto, las variaciones de las características de los objetos a estimar pueden influir a la hora de escoger una estrategia de resolución. Pero también el uso de contextos progresivamente más alejados del alumno, ante problemas con una misma formulación matemática, puede variar los modelos propuestos por los alumnos. Además, también puede variar la manera de enfrentarse a determinados procesos implicados en el ciclo de modelización. Por ejemplo, contextos cercanos facilitan el proceso de validación del modelo: los alumnos pueden acercarse al propio lugar en el que se enmarca el problema y comprobar sus hipótesis y estimaciones *in situ*. En contextos alejados, a los que resulta imposible desplazarse, este tipo de validaciones en la propia realidad no es posible. Por otra parte, un modelo diseñado y validado inicialmente en un contexto cercano puede adaptarse y reutilizarse para resolver un problema con la misma estructura, pero situado en un contexto más alejado.

Para el diseño de este tipo de secuencias tomamos la perspectiva de *upscaling & downscaling contexts* (Pla-Castells y Ferrando [26]; Albarracín *et al.* [3]), en la que todos los problemas presentan diferentes niveles de dificultad para los estudiantes debido al contexto específico elegido para cada uno de ellos, y no a su estructura, que es la misma para todos. El aspecto clave de esta forma de diseñar secuencias de problemas es desafiar a los alumnos con un problema sencillo, en un contexto conocido y cercano para que puedan generar un modelo matemático fácilmente. A partir de este primer problema, presentaremos nuevos problemas en contextos progresivamente más alejados que precisarán de modelos con más elementos de complejidad.

Mostramos una secuencia de problemas basados en la estimación de una gran cantidad de objetos (en este caso personas) dispuestos sobre una superficie, que irá variando en cada problema y que determinará los diferentes contextos, de más cercano a más alejado:

- Problema C1: ¿Cuántas personas caben en el patio del instituto?
- Problema C2.1: ¿Cuántas personas caben en el Palau Sant Jordi para un concierto?
- Problema C2.2: ¿Cuántas personas cabrían en la plaza del ayuntamiento de tu municipio durante una manifestación?

- Problema C2.3: ¿Cuántas personas cabrían en la plaza Catalunya de Barcelona durante una manifestación?
- Problema C2.4: ¿Cuántos árboles hay en Central Park?

El problema C1 actúa como una actividad promotora de la actividad de modelización, ya que es el primer contacto de los alumnos con la problemática y requiere de la creación de un primer modelo (posiblemente basado en alguna de las estrategias expuestas anteriormente, como la iteración de la unidad o la densidad). Este primer modelo puede validarse en el propio patio: los alumnos pueden experimentar directamente si sus hipótesis y estimaciones iniciales (imaginemos que han utilizado una estrategia basada en la densidad, en la que han supuesto que en un metro cuadrado caben cuatro personas) son válidas y se ajustan a la realidad.

Los problemas C2.1, C2.2, C2.3 forman parte de la secuencia para ayudar a los alumnos a cuestionar, desarrollar, reconstruir o adaptar los modelos que han creado para resolver C1, con el fin de llegar a uno generalizable. Debido a las características de los contextos de los problemas C2, los alumnos ya no pueden desplazarse a los lugares mencionados en el enunciado, con lo que la validación del modelo *in situ* no es posible. Por lo tanto, tienen que explorar cómo adaptar los modelos creados para resolver C1 para responder a estas nuevas situaciones, contrastando así las debilidades y fortalezas de los modelos creados y su posible generalización (por ejemplo, el modelo utilizado en C1, basado en la estimación de cuatro personas por metro cuadrado, puede adaptarse a la nueva situación propuesta en C2.3, considerando que ahora caben cinco personas, al tratarse de una manifestación, un evento mucho más bullicioso que el que se produce en el patio del instituto).

El problema C2.4 es ligeramente diferente a los anteriores. En este caso no se trata de estimar el número de personas en un recinto, sino el número de árboles en un escenario mucho mayor, alejado de la realidad de los alumnos (variamos el objeto y el contexto). Así, C2.4 obliga a los alumnos a generalizar las estrategias de los problemas anteriores para utilizarlas en otra situación, por ejemplo, determinando la distancia a la que dos árboles pueden crecer al competir por los recursos naturales (luz, nutrientes en el suelo).

Podríamos diseñar también otras secuencias basadas en problemas que involucren trabajar con distancias y tiempos, como, por ejemplo:

- Problema D1: ¿Cuánto tiempo tardas en ir del aula al patio del instituto?
- Problema D2.1: ¿Cuánto tiempo tardarías en ir andando desde el instituto a tu casa?
- Problema D2.2: ¿Cuánto tiempo tardarías en ir andando desde un extremo al otro de tu ciudad?
- Problema D2.3: ¿Cuánto tiempo se tardaría en ir desde Barcelona a París andando?
- Problema D2.4: ¿Cuánto se tarda en ir desde Barcelona a París en bicicleta?

Como en la secuencia anterior, el problema D1 requiere de un modelo sencillo que puede validarse en una realidad bien conocida por el alumno. A partir de este primer

modelo, basado, por ejemplo, en la estimación de una velocidad constante a la que se puede ir andando para una distancia tan corta (del aula al patio), el alumno puede enfrentarse al problema D2.1 y D2.2, introduciendo nuevos elementos de complejidad en su modelo, como, por ejemplo, añadiendo las *paradas* que se deben realizar para cruzar una calle, o las diferentes *velocidades* que se pueden llevar según la densidad de las calles que se deben recorrer. En D2.3 tendremos que tener en cuenta, además, el tiempo necesario de descanso para recorrer una distancia tan grande. Finalmente, en el problema D2.4, tendremos que modificar el modelo inicial, basado en una velocidad a la que puedo ir caminando, para estimar la velocidad que se puede llevar al ir en bicicleta, teniendo en cuenta las diferentes vías que se deben recorrer hasta alcanzar su destino.

Finalmente, y tras haber trabajado diferentes secuencias de problemas desde las dos perspectivas expuestas anteriormente, podríamos iniciar a los estudiantes en nuevos problemas en los que fuera necesario introducir nuevos elementos de complejidad a la hora de diseñar sus modelos y que se acercaran, de forma progresiva, a lo que entendemos por un problema de modelización. Por ejemplo, «¿cuántos carros de la compra crees que necesitará como mínimo el IKEA que hay en tu localidad?» o «¿qué cola escogerías a la hora de pagar en un supermercado?» o «¿cuánto tiempo necesitarías para registrar el instituto en busca de un portátil que hemos perdido?», son problemas que nos pueden servir de transición desde los problemas de Fermi iniciales a los problemas de modelización más complejos.

3.3. Formación del profesorado

Desde hace décadas se estudia qué conocimientos son necesarios para enseñar matemáticas. Shulman [32] destacó la importancia del conocimiento del contenido —es decir, de las matemáticas como disciplina— y del conocimiento didáctico del contenido, esto es, de la instrucción y aprendizaje de los contenidos matemáticos. Posteriormente se han desarrollado modelos específicos de conocimiento del docente de matemáticas, que enfatizan la resolución de problemas como una competencia docente que reúne conocimientos de conceptos y de prácticas matemáticas, pero también de estrategias de enseñanza y características de su aprendizaje [11].

En los últimos años la investigación sobre resolución de problemas de Fermi en educación matemática también se ha abordado desde la formación del profesorado, con la perspectiva de conocer si los docentes —especialmente de primaria, cuya formación disciplinar es menos sólida— tienen los conocimientos necesarios para implementar con éxito este tipo de problemas en las aulas. Numerosas investigaciones previas destacan que los futuros maestros (y también los profesores de secundaria en formación) tienen dificultades cuando resuelven problemas de modelización (por ejemplo, Klock y Siller [18]).

En Segura y Ferrando [29] se caracteriza el rendimiento de los futuros maestros resolviendo problemas de Fermi a través de una diferenciación de los errores cometidos: por un lado, están los errores que impiden desarrollar una estrategia válida para alcanzar la solución, es decir, aquellos ligados a la modelización; por otro, están los errores de trabajo matemático, cometidos durante la ejecución de la estrategia,

de tipo conceptual o procedimental. Segura y Ferrando [29] observaron que, efectivamente, los futuros maestros cometen numerosos errores durante la modelización (falta de variables identificadas o de relaciones entre variables) y en el trabajo matemático (errores de inversión en una división de medidas, errores en conversión de unidades, etcétera).

Además de un rendimiento exitoso, el conocimiento sobre resolución de problemas de modelización, por tratarse de problemas abiertos, requiere que el docente sea competente en usar múltiples resoluciones y sea capaz de compararlas entre sí [8]. Esta competencia está ligada a las habilidades de flexibilidad y adaptabilidad, dos componentes importantes del conocimiento docente, pues son condición necesaria para disponer de un amplio abanico de estrategias en la enseñanza de las matemáticas y para interpretar la variedad de actuaciones del alumnado.

Heinze *et al.* [17] definen la flexibilidad como la capacidad de utilizar distintas estrategias y cambiar de una a otra cuando se resuelve un mismo problema o problemas similares. Ferrando *et al.* [15] mostraron que, a través de variaciones de variables contextuales, se pueden diseñar secuencias de problemas de Fermi muy similares (se centraron en aquellos que demandan la estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada) que promuevan cambios de estrategia en los futuros maestros. En efecto, contrastaron de un problema a otro algunas variables contextuales como el orden/desorden en la disposición de los elementos, su tamaño o la regularidad de su forma (por ejemplo, un problema demandaba estimar elementos ordenados y regulares, como adoquines en el suelo, y el siguiente problema elementos desordenados e irregulares, como briznas de césped).

A partir de estos trabajos, en Segura y Ferrando [29] se define la *flexibilidad* en la resolución de una secuencia de problemas de Fermi como el uso de múltiples estrategias cambiando de una a otra en algunos problemas. Por ejemplo, un futuro maestro es flexible cuando utiliza una estrategia de iteración de la unidad en el problema de los adoquines y luego cambia a una estrategia de densidad en el problema del césped. De hecho, utilizando una secuencia de cuatro problemas de Fermi, Segura y Ferrando [29] distinguen tres niveles de flexibilidad: nada flexible (se utiliza la misma estrategia para todos los problemas); moderadamente flexible (se cambia de estrategia solo en un problema); y muy flexible (se cambia de estrategia en dos o más problemas). Gracias a esta distinción, encuentran que hay relaciones entre la flexibilidad y el rendimiento de los futuros maestros cuando resuelven secuencias de problemas de Fermi. Así, los futuros maestros muy flexibles tienen un rendimiento significativamente más alto que los moderadamente flexibles y que los no flexibles, pues no solo cometen menos errores estratégicos (vinculados al desarrollo del modelo matemático), sino que también cometen menos errores de trabajo matemático (relacionados con el razonamiento proporcional, el cálculo y las habilidades de medida).

Un paso más allá, la adaptabilidad consiste no solo en usar múltiples estrategias, sino en escoger la más adecuada o eficaz para el problema [17]. Esta habilidad estaría detrás de la capacidad del docente de comparar entre distintas estrategias de resolución de un mismo tipo de problemas, señalando ventajas y desventajas de cada una. Segura y Ferrando [30] identificaron dos criterios para juzgar la eficacia de una estrategia de resolución de problemas de Fermi: la rapidez, esto es, el menor número

de pasos; y el rigor, es decir, apoyarse en estimaciones parciales que pueden contrastarse empíricamente durante el desarrollo de la estrategia. Además, encontraron que la rapidez se vincula con la estrategia de la iteración de la unidad y el rigor con la estrategia de densidad, y que unas son más apropiadas que otras dependiendo de las características contextuales (el criterio de rapidez es eficaz, por ejemplo, en problemas con los elementos ordenados, como el de los adoquines, mientras que el criterio de rigor es más eficaz en los problemas con los elementos desordenados, como el del césped). Además, en Segura *et al.* [31] se observó que los futuros maestros presentan mayor adaptabilidad cuando resuelven los problemas de Fermi experimentalmente y en grupos, en el lugar real donde se demanda la estimación, que cuando los resuelven individualmente y deben evocar la situación desde el aula. Por lo tanto, estos trabajos muestran que puede diseñarse formación inicial para docentes que promueva la flexibilidad y la comparación de múltiples estrategias utilizando secuencias de problemas de Fermi y dinámicas que combinen trabajo individual en el aula y trabajo grupal fuera de ella.

4. Reflexiones finales

En este artículo hemos presentado los problemas de Fermi como actividades que permiten introducir la modelización matemática en primaria y secundaria. Un aspecto clave de los problemas de Fermi es que pueden ser usados de formas diversas, ya sea como proyectos, problemas individuales o estructurados como secuencias. En cada caso, es el profesorado quien debe decidir qué problema proponer y qué uso va a darle.

En las discusiones entre alumnos para resolver problemas de Fermi aparecen una gran variedad de ideas interesantes, desde las relacionadas con la realidad más próxima a discusiones sobre conceptos matemáticos relevantes. De hecho, también es posible utilizarlos a nivel universitario.

Un ejemplo es estimar la cantidad de energía utilizada por la humanidad cada año para compararla con la energía que la Tierra recibe del Sol. Morgan [24] ha usado este problema en un curso de astrobiología para concienciar a los estudiantes sobre sostenibilidad y las necesidades sociales asociadas al consumo energético. Por su parte, Vidal *et al.* [34] plantean a sus estudiantes de cálculo que estimen el volumen de diversas montañas como forma de introducir la integral aproximada de volúmenes a partir de curvas de nivel. Estos ejemplos son muestra del potencial de los problemas de Fermi, que pueden ser utilizados de formas muy diversas.

Para finalizar, destacamos el papel de la estimación en la educación matemática. Las matemáticas son, por su naturaleza, rigurosas y precisas, pero su aplicación a situaciones reales requiere en muchos casos el trabajo con cantidades que no están bien definidas o el uso de modelos complejos. En este sentido, los problemas de Fermi se postulan como una opción para aprender a trabajar con informaciones parciales o difusas, poniendo de manifiesto que el modelo matemático construido es la herramienta que permite entender mejor la realidad, que es, con demasiada frecuencia, más compleja de lo que parece a simple vista. Algunas de las dificultades

de trabajar con esa complejidad pueden superarse al simplificar la realidad usando estimaciones.

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo económico que han recibido de los proyectos PID2020-117395RB-I00 y PID2021-126707NB-I00, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por los fondos *ERDF A way of making Europe*. Lluís Albarracín es Professor Agregat Serra Húnter y pertenece al grupo de investigación GIPEAM (2021SGR-00159).

Referencias

[1] L. Albarracín, Large number estimation as a vehicle to promote mathematical modeling, *Early Child. Educ. J.* **49** (2021), 681–691.

[2] L. Albarracín y N. Gorgorió, Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers, *Educ. Stud. Math.* **86** (2014), 79–96.

[3] L. Albarracín, C. Segura, I. Ferrando y N. Gorgorió, Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks, *Teach. Math. Appl.* **41** (2022), 183–197.

[4] J. B. Ärlebäck, On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school, *Math. Enthus.* **6** (2009), 331–364.

[5] J. B. Ärlebäck y L. Albarracín, The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies, *ZDM - Math. Educ.* **51** (2019), 979–990.

[6] W. Blum y D. Leiss, How do students and teachers deal with modelling problems?, *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12*, 222–231, Woodhead Publishing, 2007.

[7] W. Blum y M. Niss, Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction, *Educ. Stud. Math.* **22** (1991), 37–68.

[8] R. Borromeo Ferri, *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*, Springer, 2018.

[9] R. Borromeo Ferri, Mandatory mathematical modelling in school: what do we want the teachers to know?, *Mathematical modelling education in East and West*, 103–117, Springer, 2021.

[10] J. E. Carlson, Fermi problems on gasoline consumption, *Phys. Teach.* **35** (1997), 308–309.

[11] O. Chapman, Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving, *Lumat: International Journal on Math, Science and Technology Education* **3** (2015), 19–36.

[12] J. A. Czocher, Mathematical modeling cycles as a task design heuristic, *Math. Enthus.* **14** (2017), 129–140.

[13] L. D. ENGLISH, Data modelling in the beginning school years, *Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, 226–234, MERGA, 2011.

[14] I. FERRANDO Y L. ALBARRACÍN, Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models, *Math. Educ. Res. J.* **33** (2021), 61–78.

[15] I. FERRANDO, C. SEGURA Y M. PLA-CASTELLS, Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation, *Can. J. Sci. Math. Technol. Educ.* **20** (2020), 557–573.

[16] N. HABERZETTL, S. KLETT Y S. SCHUKAJLOW, Mathematik rund um die Schule — Modellieren mit Fermi-Aufgaben, *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule*, 31–41, Springer, Wiesbaden, 2018.

[17] A. HEINZE, J. R. STAR Y L. VERSCHAFFEL, Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, *ZDM - Math. Educ.* **41** (2009), 535–540.

[18] H. KLOCK Y H. S. SILLER, A time-based measurement of the intensity of difficulties in the modelling process, *Mathematical modelling education and sensemaking. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*, 163–173, Springer, 2020.

[19] R. LEHRER Y L. SCHAUBLE, Inventing data structures for representational purposes: elementary grade students' classification models, *Math. Think. Learn.* **2** (2000), 51–74.

[20] R. LESH Y G. HAREL, Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Math. Think. Learn.* **5** (2003), 157–189.

[21] M. LÓPEZ, L. ALBARRACÍN, I. FERRANDO, J. MONTEJO-GÁMEZ, P. RAMOS, A. SERRADÓ, E. THIBAUT Y R. MALLAVIBARRENA, La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato, *Libro blanco de las matemáticas*, 1–94, R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2020.

[22] V. LÓPEZ-SIMÓ Y M. F. REZENDE, Challenging ChatGPT with different types of physics education questions, *Phys. Teach.* **62** (2024), 290–294.

[23] M. MINSKY, Matter, mind and models, *Proceedings of the International Federation of Information Processing Congress*, **1**, 45–49, MIT, 1965.

[24] D. L. MORGAN, Measuring the effect of an astrobiology course on student optimism regarding extraterrestrial life, *Int. J. Astrobiol.* **16** (2017), 293–295.

[25] M. NISS, Models and modelling in mathematics education, *EMS Newsletter* **86** (2012), 49–52.

[26] M. PLA-CASTELLS E I. FERRANDO, Downscaling and upscaling Fermi problems, *Proceedings of Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Utrecht, Netherlands, 2019.

[27] H. O. POLLAK, The interaction between mathematics and other school subjects, *New Trends in Mathematics Teaching, Volume IV*, 232–248, UNESCO, París, 1979.

[28] S. Schukajlow, G. Kaiser, y G. Stillman, Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art, *ZDM - Math. Educ.* **50** (2018), 5–18.

[29] C. Segura e I. Ferrando, Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems, *Educ. Stud. Math.* **113** (2023), 207–227.

[30] C. Segura e I. Ferrando, ¿Qué estrategia es mejor para un problema de Fermi? Adaptabilidad de futuros maestros, *Enseñ. Cienc.* **41** (2023), 133–151.

[31] C. Segura, I. Ferrando y L. Albarracín, Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers, *J. Math. Behav.* **70** (2023), 101040.

[32] L. S. Shulman, Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educ. Res.* **15** (1986), 4–14.

[33] K. Velten, *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*, John Wiley & Sons, 2009.

[34] A. Vidal, V. D. Estruch y F. J. Boigues, Flipped teaching aplicado al estudio de los métodos elementales de integración aproximada. Una experiencia educativa, *Redes colaborativas en torno a la docencia universitaria*, 392–401, Universitat d'Alacant, 2017.

Irene Ferrando, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València
Correo electrónico: irene.ferrando@uv.es

Lluís Albarracín, Dpt. de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona
Correo electrónico: lluis.albarracin@uab.cat
Página web: https://webs.uab.cat/lluisalbarracin

Carlos Segura, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València
Correo electrónico: carlos.segura@uv.es

César Gallart, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València
Correo electrónico: cesar.gallart@uv.es