Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2013, Vol. 30(1), nº 83, 57-68*

Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación[1]

Juan Manuel García Navarro
IES Los Alcores

Resumen: *Desde la enseñanza de las matemáticas se ha potenciado una visión de la misma como ciencia de la precisión en la que se obtienen respuestas concretas a preguntas concretas, sobre todo en sus niveles más básicos. Sin embargo, esta disciplina también se ha ocupado desde siempre de problemas relacionados con la aproximación y la estimación.*
Mediante la suposición y la estimación es posible aproximar de modo razonable algunos problemas de cálculo conocidos como problemas de Fermi, llamados así, sobre todo en el mundo anglosajón, en honor al físico Enrico Fermi.
Palabras clave: *Problemas de Fermi, resolución de problemas, aproximación, estimación, suposición.*

Fermi problems. Guess, estimation and approximation

Abstrac: *From the teaching of the mathematics, a vision of itself has been promoted as a science of precision that obtains specific answers to specific questions, especially in the most basic levels. However, this discipline is also characterized by dealt with problems related to the approximation and estimation*
Through the guess and estimation is possible to approximate some calculations problems known as Fermi problems, named in honour of the physicist Enrico Fermi.
Keywords: *Fermi questions, problem solving, approximation, estimation, guess.*

1. En castellano no hay un término específico para este tipo de problemas. En el mundo anglosajón, el modo de razonar para resolver este tipo de problemas se llama "guesstimation", término utilizado por primera vez por los estadísticos de los Estados Unidos en los años 30 del siglo XX. Proviene de la contracción de "guess" -suponer, suposición- y "estimation" -estimación-.

INTRODUCCIÓN

¿Cuántos afinadores de pianos hay en Chicago? ¿Cuánta comida y bebida debo comprar para mi fiesta de cumpleaños? ¿Cuántos taxis hay en mi ciudad? ¿Cuántos españoles se están hurgando la nariz en este preciso momento?

Aunque las matemáticas se han ocupado desde siempre de problemas relacionados con la aproximación y la estimación, desde la enseñanza de esta materia se ha potenciado una visión de la misma como ciencia de la precisión en la que se obtienen respuestas concretas a preguntas concretas, sobre todo en sus niveles más básicos. Sin embargo, esta disciplina también se caracteriza por procesos más alejados de ese determinismo como la exploración, interpolación, estimación, predicción, deducción…

Las causas por las que necesitamos aproximar o estimar una cantidad pueden ser muy variadas. Si estamos midiendo una cantidad, por ejemplo, los instrumentos utilizados tienen una precisión limitada, con lo que nunca obtendremos el valor "exacto". Otras veces es necesario aproximar debido a la naturaleza intrínseca de los datos manejados, como en el caso de necesitar cifras decimales de números irracionales. En otras ocasiones, la necesidad de tomar una decisión en poco tiempo nos puede obligar a ello o bien simplemente no se necesitan resultados exactos. Precisamente, la estimación es utilizada en los contextos más variados de la vida cotidiana debido a que raramente se necesita exactitud: "llegaré sobre las seis de la tarde", "me gasté unos 600 € durante mis vacaciones", "asistieron unos 2000 espectadores", etc.

Mediante la suposición y la estimación es posible aproximar de modo razonable algunos problemas de cálculo cuya solución exacta es imposible obtener, debido a la imposibilidad de obtener todos los datos necesarios a partir del enunciado, o bien no compensa obtenerla por los recursos que tendríamos que invertir para ello y nos basta con una aproximación.

Este tipo de problemas de cálculo aproximado se conocen, sobre todo en el mundo anglosajón, como problemas de Fermi. Se llaman así en honor al físico Enrico Fermi, famoso, entre otras muchas cosas, por hacer muy buenos cálculos con datos muy escasos. Una de sus características principales es el contraste de la familiaridad y simplicidad de la pregunta con la aparente imposibilidad de obtener su respuesta: *¿Cuántos afinadores de piano hay en Chicago?* Nuestra primera impresión es que no tenemos datos suficientes. Sin embargo, los problemas de Fermi muestran cómo podemos hacer uso de unos conocimientos y procedimientos nada extraordinarios para obtener respuestas aproximadas a este tipo de preguntas. Además, este tipo de cálculos puede realizarse utilizando unas cuantas operaciones elementales, por lo que también suelen llamarse en el mundo anglosajón *cálculos del dorso del sobre*[2] (*back-of-the-envelope calculations*) por el espacio que se supone necesario para obtener la "solución".

2. Pienso que un término más adecuado en castellano sería el de *cálculos de servilleta*, también referido a la pequeña superficie de las servilletas de papel habituales en cafeterías, bares, etc. y que son tan socorridas a la hora de hacer alguna anotación.

BREVE BIOGRAFÍA DE FERMI

Enrico Fermi es considerado uno de los grandes físicos del s. XX. Nadie fue tan versátil como él, dotado de un talento genial tanto para la física teórica como para la experimental. Es conocido, principalmente, por haber llevado a cabo la primera reacción nuclear controlada.

Fermi nació en Roma el 29 de septiembre de 1901, hijo de Alberto, empleado en la compañía estatal de trenes, y de Ida, maestra. Su educación superior tuvo lugar en Pisa, donde obtuvo título de Doctor en Física en 1922 con un trabajo experimental sobre los rayos X. Durante el curso académico 1923-1924 enseñó matemáticas en la universidad de Roma y el siguiente lo pasó en Florencia. Al año siguiente volvió a Roma donde ocupó la cátedra de Física teórica en la universidad, puesto que conservó hasta 1938. Ese año obtuvo el premio Nobel por sus trabajos sobre las reacciones nucleares provocadas por los neutrones lentos[3]. A finales de ese año, aprovechó su viaje a Estocolmo con toda su familia para emigrar a los Estados Unidos a causa del recrudecimiento de las leyes antisemitas en la Italia fascista (su esposa, Laura, era judía).

En enero de 1939, al poco tiempo de su llegada a Estado Unidos, donde pronto ocupó una cátedra de Física en la universidad de Columbia en Nueva York, tuvo noticias del descubrimiento de la fisión. Rápidamente se dio cuenta de las posibilidades de lograr una reacción en cadena y sus consecuencias, por lo que se puso inmediatamente a trabajar experimentalmente en ello. Sus trabajos subsiguientes fueron clasificados por el gobierno como secretos, creándose así la primera fase del *Proyecto Manhattan* con el fin de crear una bomba atómica. Así, Fermi siguió con su trabajo en Nueva York al tiempo que mantenía una actividad secreta en Chicago. De abril de 1942 a septiembre de 1944 fue la figura clave del "Laboratorio Metalúrgico", el equipo secreto del campus de la universidad de Chicago cuyo objetivo era desarrollar una pila nuclear –reactor, en la terminología actual- y, en último término, la bomba nuclear. La creación de la primera pila nuclear culminó el 2 de diciembre de 1942. En 1944, él y su esposa adquirieron la nacionalidad estadounidense y en septiembre de ese año se trasladó a Los Álamos, en el estado de Nuevo México, donde sería una figura clave en el *Proyecto Manhattan* bajo la dirección de Robert Oppenheimer. El proyecto culminó con la explosión, el 16 de julio de 1945, de la primera bomba atómica de la historia. Como anécdota que ilustra sus extraordinarias facultades de estimaciones de cálculo, Fermi asistió a la detonación en el desierto de Alamogordo, en nuevo México, la conocida como prueba *Trinity*. En el momento de la explosión, dispersó unos trocitos de papel antes y durante el paso de la onda expansiva. Observando la distancia recorrida por los trocitos estimó la potencia de la bomba en unas 10.000 toneladas de TNT, cifra muy parecida a la que obtuvieron semanas de cálculos después con los datos proporcionados por los sensores diseminados por la zona (Allison, Segré y Anderson, 1955).

3. La genialidad de Fermi consistió en frenar las partículas con las que bombardeaba los núcleos de los elementos para transmutarlos. Mientras que todos sus colegas competían por acelerar dichas partículas a fin de dotarlas de mayor energía, Fermi descubrió que frenándolas mediante choques con moléculas de agua que rodeaba la fuente emisora obtenían la suficiente energía para interactuar con los núcleos de los elementos, contrariamente a lo que ocurre en el mundo macroscópico y, por lo tanto, a la intuición.

Una vez terminada la guerra, Fermi aceptó un puesto en la universidad de Chicago, actividad que no abandonaría hasta su muerte, acaecida el 29 de noviembre de 1954. Retomó sus clases y sus investigaciones académicas, lo que fue, seguramente, su mayor contribución a la Física en el periodo de postguerra: cuatro de sus alumnos de doctorado llegaron a recibir el Nobel. Le gustaba estimular la inteligencia y el espíritu crítico de sus alumnos con problemas poco habituales en una clase de Física, como preguntándoles cuántos afinadores de pianos creían que había en Chicago. Como solía decir, no se trataba de enseñar qué pensaba Galileo, si no de discutir cómo pensaba.

QUÉ SON LOS PROBLEMAS DE FERMI

Los problemas de Fermi son problemas de cálculo en los que se espera que demos como respuesta una solución aproximada pero razonable, dado que los datos de partida son limitados o no están definidos explícitamente e impiden dar una solución exacta.

Analicemos un ejemplo para ver algunas características más: "*¿cuántos latidos da el corazón de un hombre a lo largo de su vida?*"

- Este problema no se refiere a un hombre en concreto, lo cual imposibilita dar una respuesta exacta. Casi siempre empezaremos a resolver un problema de Fermi diciendo:"supongamos que…".
- La resolución del problema pone más énfasis en el desarrollo del razonamiento que en la respuesta en sí.
- Un problema de Fermi nos invita a hacernos más preguntas para resolverlo ya que requiere una serie de conocimientos no mencionados en el enunciado. Siguiendo con nuestro ejemplo, el razonamiento nos lleva a preguntarnos: ¿cuál es la vida media de un hombre? ¿cuál es la media de sus pulsaciones?, etc.
- Los problemas de Fermi, a pesar de las limitaciones en los datos o la dificultad de análisis, se refieren a cuestiones objetivas que pueden abarcar cualquier campo o disciplina. En ocasiones son asombrosamente familiares.
- Si dispusiésemos de todos los datos necesarios llegaríamos a una solución determinada de manera muy sencilla; por lo tanto, la dificultad está en la naturaleza de esos datos, no en el cálculo en sí.
- Cuando existen resultados con los que comparar[4] se considera que la respuesta es muy buena si se acierta en el orden de magnitud de la solución.
- A primera vista, los problemas de Fermi son similares a otros problemas y acertijos populares. No debemos confundirlos con los problemas llamados de "pensamiento lateral", del tipo: "*Un hombre empuja su coche a un hotel y pierde toda su fortuna. ¿Qué le ha ocurrido?*" No son problemas de cálculo, pero comparten con los problemas de Fermi el hecho de que no disponemos de datos suficientes en su enunciado para dar una respuesta exacta. Son problemas en los que, más que el razonamiento, se prima la originalidad para interpretar la situación descrita

4. En concursos escolares de ciencias, por ejemplo, se suele establecer un dato, calculado previamente por los organizadores de la prueba, considerado como la "solución" para puntuar las respuestas de los distintos participantes en función de su proximidad a ella.

y dar una respuesta que se corresponda con el escenario representado en él (en el ejemplo anterior se puede pensar en un conductor con su vehículo averiado que lo empuja hasta un hotel al que entra para pedir ayuda, pero hay un casino y decide esperar la grúa jugando, etc., o bien argumentar que se trata de una persona que juega al Monopoly, respuesta más original y divertida que también se ajusta perfectamente al enunciado).

CÓMO RESOLVER LOS PROBLEMAS DE FERMI

No hay un procedimiento bien definido para la resolución de este tipo de problemas. Debemos recordar que si conociésemos todos los datos necesarios su resolución sería muy fácil mediante operaciones elementales de aritmética, por lo que la clave estará en aproximar los datos con los que haremos los cálculos. De todas formas, sí podemos dar unas sugerencias generales:

- Lo primero sería descomponer el problema principal en otros secundarios más fáciles de abordar. Si queremos estimar, por ejemplo, el número de hojas de un árbol, podemos hacerlo multiplicando el número de ramas por el número de hojas en cada rama. Nos resultará algo más cómodo pensar primero en un árbol desnudo de hojas para estimar sus ramas y luego en una rama individual para hacer lo mismo con sus hojas.
- Nuestra experiencia nos permite aproximar muchos datos sin ningún tipo de técnica especial. Por ejemplo, sabemos que la vida media de una persona está sobre los 75-80 años, que pueden caber tres o cuatro personas en un metro cuadrado de suelo, que dormimos unas ocho horas diarias, etc.
- Si la cantidad a estimar se escapa de nuestra experiencia, podemos proceder dando un límite superior y otro inferior que nos parezcan razonables y hallar su media geométrica[5].
- Simplificar los números redondeándolos ya que no tiene sentido buscar una solución exacta.
- Aunque podemos enfrentarnos a un problema de Fermi sin nada más que lápiz y papel, también cabe la posibilidad de conseguir datos concretos por nosotros mismos o buscarlos[6] en enciclopedias, la web, etc.

5. ¿Por qué la media geométrica? Hemos visto que el objetivo principal es acercarnos al orden de magnitud de la respuesta. Éste aparece reflejado en el exponente cuando se expresa en notación científica. Así, si tenemos dos números con dos órdenes distintos, la media aritmética de sus órdenes corresponde aproximadamente al orden de la media geométrica de los dos números (si la suma de los órdenes es par, es exactamente así; si es impar, es un poco más complicado, redondeando la media aritmética unas veces al entero superior y otras al inferior).

6. Aunque muchos datos de los que aparezcan en los problemas pueden ser consultados con relativa facilidad, el espíritu en este texto es resolverlos partiendo sin ningún dato a priori, únicamente con nuestra experiencia personal y lo que puede considerarse como una asunción razonable. De todas formas, muchos de esos datos que se pueden consultar en cualquier enciclopedia o a través de la red, como la masa de la Tierra o la producción mundial de acero, no dejan de ser otros problemas de Fermi resueltos por "expertos", es decir, personas con la suficiente experiencia en el campo correspondiente como para que sus estimaciones sean consideradas como oficiales.

Veamos ahora la resolución de algunos ejemplos concretos. Comencemos por el problema del apartado anterior:

¿Cuántos latidos da el corazón de un hombre a lo largo de su vida?

Supongamos que una persona vive, de media, 75 años. El ritmo cardíaco de una persona depende de varios factores como la condición física de esa persona, de su actividad diaria, etc., y además, para un mismo sujeto, varía a lo largo del día. Usaremos la estrategia de decidir un límite inferior y uno superior y luego hacer la media geométrica. En nuestro caso, podríamos poner 60 como límite inferior y 100 como superior (60 puede ser un pulso en reposo y 100 con una cierta excitación). Así la media geométrica sería de 77,45. Redondeando, tomaremos 75 pulsaciones por minuto. El resto de datos sí son exactos: segundos, minutos, horas y días en un año. Así, nos queda que los latidos en 75 años serían:

75 latidos/min x 60 min/hora x 24 horas/día x 365 días/año x 75 años= $2{,}95 \cdot 10^9$ latidos.

Observemos que, si en lugar de tomar 75 años de vida, hubiésemos realizado los cálculos con 80 años, el resultado sería de $3{,}15 \cdot 10^9$ latidos, una cifra que tiene el mismo orden que la anterior. Algo similar ocurriría si tomásemos 60 ó 70 pulsaciones, etc. Lo importante en este problema es saber de qué depende la solución. En este caso, de la duración de la vida de la persona y de su media de latidos por minuto.

Veamos ahora el problema considerado canónico:

¿Cuántos afinadores de piano hay en Chicago?

Este problema puede resultarnos algo más complicado en principio debido a que los datos involucrados están más alejados de nuestra experiencia (al menos de la mía). Aunque puede haber distintas maneras de abordarlo, la solución aquí propuesta se basa en considerar que los afinadores trabajan a tiempo completo, lo que su número vendrá dado como el cociente entre las afinaciones necesarias para todos los pianos de Chicago en un periodo de tiempo, un año por ejemplo, y las afinaciones que puede realizar un afinador en ese periodo.

Concretamos: Debemos empezar a estimar la población de una ciudad grande como Chicago. Digo que es grande ya que me resulta conocida, al menos de oídas. Tomaremos cuatro millones de habitantes (puede que sean tres o cinco millones, pero recordemos que lo que nos interesa es el orden del número). A continuación, pensemos en cuántos hogares formarán esos habitantes. Desde los hogares unipersonales hasta las familias muy numerosas hay un gran trecho. Lo habitual sería una pareja de padres y uno o dos hijos, y a veces algún abuelo. Veo razonable tomar cuatro personas por hogar, lo que daría $4 \cdot 10^6$ habitantes entre 4 personas por hogar igual a 10^6 hogares. De éstos, ¿cuántos poseen pianos? Al contrario que los habitantes de una gran ciudad, mi experiencia con los números de pianos por hogar es prácticamente nula, por lo que procederé poniendo un límite superior e inferior y redondeando su media geométrica. Pienso que puede estar

entre 1 de cada 100 y 1 de cada 10, por lo que tomaremos 1 de cada 30, lo que da un total de 10^6 hogares por 1 piano en cada 30 hogares hacen unos 33000 pianos.

Veamos cuántos afinadores se necesitan para esos pianos. Empezaremos suponiendo que cada piano necesita ser afinado una vez al año (seguro que hay algunos, como en escuelas, conservatorios y orquestas que lo hagan con más frecuencia, al igual que habrá otros que lo harán cada muchos años) y que un afinador tarda dos horas en afinarlo más una en trasladarse de un piano a otro, unas tres horas por piano. Si trabaja 8 horas al día, 5 días a la semana durante 48 semanas al año, resulta que un afinador puede hacerlo un total de 8 horas por 5 días por 48 semanas entre 3 horas por afinación igual a 640 veces al año. Si suponemos que hay pleno empleo de afinadores, esto nos da 33000 afinaciones necesarias entre 640 afinaciones por afinador hacen unos 50 afinadores. De nuevo, la respuesta seguramente no sea exacta, pero sabemos de qué depende la solución.

PARA QUÉ SIRVEN LOS PROBLEMAS DE FERMI

Aunque puedan parecer que no son más que un pasatiempo, en realidad estamos realizando constantemente aproximaciones y estimaciones ya que en pocas ocasiones a lo largo del día necesitamos mucha precisión en los números que manejamos y en los cálculos que hacemos con ellos: el tiempo que tardaremos en hacer nuestro trayecto en coche, coger dinero para la compra semanal en el supermercado, el presupuesto de esa semana de vacaciones en el extranjero, etc. Gracias a nuestra experiencia, en algunos casos hacemos estos cálculos de manera automática (como la compra semanal) y en otros necesitarán una mayor reflexión (como el presupuesto para unas vacaciones).

Tanto a nivel doméstico como en situaciones de mayor envergadura, los problemas de Fermi son usados como una primera aproximación para ver la viabilidad de un proyecto de una forma más rápida y económica antes de acometer una serie de comprobaciones posteriores de mayor coste. Si el gobierno planea crear, por ejemplo, un escudo de defensa antimisiles y estima que el porcentaje de intercepción de misiles enemigos estará en torno al 90 %, puede decidirse a construir prototipos y hacer pruebas con misiles reales para seguir comprobando su eficacia; pero si se estima que el acierto estaría en torno a un 10 %, podría desechar el proyecto desde un principio. En nuestro problema de los pianos, si tenemos la intención de poner un negocio en Chicago relacionado con los afinadores de piano, por ejemplo, sabríamos que se trata de decenas de profesionales, quizás algunos cientos pero muy difícil que sean miles. Una vez conocidos los parámetros de los que depende la solución, podemos optar por obtener una respuesta más afinada (valga la redundancia) a costa de invertir en más recursos: consultando el censo de la ciudad en sitios oficiales, encargando un estudio de los hogares con pianos a una empresa de estadística, preguntando a afinadores profesionales por los tiempos de trabajo etc.

Los problemas de Fermi se utilizan también como pruebas dentro del proceso llevado a cabo en la selección de trabajadores de ciertas empresas muy de moda en el mundo de la tecnología. Gigantes de la web como Google, Amazon o BestBuy son muy populares en la red también por las preguntas que pueden hacer en alguna de las numerosas fases

en sus procesos de selección de personal[7] (Poundstone, 2007; 2012). Sin ser de las más determinantes (alguien quedaría fuera del proceso antes por no saber un segundo idioma, por ejemplo), son, sin embargo, las más populares, ya que sabemos cuándo estamos preparados para una entrevista en un idioma no nativo pero nunca estaremos seguros de poder responder *cuánto mide una fila formada por todos los cabellos de una persona*.

Por último, en el mundo anglosajón, en especial en los EEUU, es muy habitual que los problemas de Fermi formen parte de concursos académicos de ciencias. En este contexto sí importa la solución además del razonamiento, ya que hay que decir cuál es la más correcta entre varias posibles respuestas. Como hemos comentado antes, en tales casos se ha calculado previamente una solución, por parte de los expertos que organizan la prueba, que se considera la "correcta" y la puntuación será mayor cuanto más próxima esté de ella la respuesta que proporcionemos.

POR QUÉ FUNCIONAN LOS PROBLEMAS DE FERMI

A pesar de todas las limitaciones que nos encontramos a la hora de resolver un problema de Fermi, resulta sorprendente que las respuestas son muy razonables, es decir, que los problemas de Fermi funcionan. ¿Cómo es posible que en un proceso en el que hay que ir estimando en varios pasos, cometiendo errores en definitiva, al final obtengamos un resultado razonable? ¿Acaso la solución final no contiene la acumulación de todos los errores producidos por las estimaciones que hacemos en cada paso? Al contrario de lo que pudiésemos pensar en un principio, los errores tienden a cancelarse entre sí. La idea es que unas veces nos equivocamos de más y otras de menos, y además con la misma probabilidad. En el ejemplo de los pianos, si en lugar de cuatros millones de habitantes tomamos tres, luego podríamos tomar cinco personas por hogar y un piano por cada 50 hogares, con lo que el resultado final sería unos 20 afinadores, que sigue estando dentro del orden de la solución anterior. En un paso nos equivocaríamos en un orden o dos por encima del valor correcto y en el siguiente quizás en dos o tres por debajo, con lo que se van anulando poco a poco. Es poco probable que todos los errores que cometamos caigan en la subestimación o que todos caigan en la sobreestimación. Las leyes de la probabilidad nos dicen que los errores tenderán a compensarse y los resultados convergerán al valor correcto.

A MODO DE CONCLUSIÓN: RAZONES PARA SU ENSEÑANZA.

Aplicamos continuamente procesos de estimación y aproximación en nuestra vida cotidiana para resolver situaciones en las que no necesitamos demasiada exactitud. En la mayoría de esas ocasiones lo hacemos de manera inconsciente debido a que son situaciones a las que estamos habituados. Sin embargo, podemos tratar como problemas de Fermi esas otras cuestiones que no solventamos de manera automática. Aplicar estas

7. Los dos libros de Poundstone (2007) y (2012) que figuran en la bibliografía son recopilaciones de este tipo de preguntas y consejos para superarlas, en las que aparecen mezclados sin distinción problema de Fermi con otros de pensamiento lateral.

técnicas en nuestro quehacer diario nos hará mejorar nuestro pensamiento crítico y sentido común:

> En última instancia, el valor de hacer frente a los problemas de la ciencia, o de la vida cotidiana del modo en el que lo hizo Fermi se encuentra en la recompensa de hacer descubrimientos de manera autónoma e independiente. No importa si el descubrimiento es tan importante como el rendimiento de una bomba nuclear o tan trivial como estimar el número de afinadores de pianos de una ciudad del Medio Oeste. Buscar la respuesta en un libro o dejar que otro la obtenga por ti, realmente le empobrece a uno; priva a la persona del placer y el orgullo que acompañan a la creatividad y le aparta de una experiencia que refuerza la confianza en sí mismo. La autoconfianza es, a su vez, el requisito esencial para resolver los problemas de Fermi. Así, enfocar los dilemas personales como problemas de Fermi puede llegar a ser, mediante una especie de reacción en cadena, un hábito que enriquece la vida[8] (Von Baeyer, 1988).

Por último, aunque pueden plantearse como una práctica personal diaria, los problemas de Fermi son idóneos para la resolución de problemas en el ámbito académico. Los problemas de Fermi nos pueden servir para mostrar a los alumnos la conexión entre las matemáticas y el mundo real, a veces de manera asombrosa según qué enunciados. A través de ellos, los estudiantes tienen la oportunidad de descubrir múltiples caminos para resolver un problema, a la vez que desarrollan habilidades de estimación, sentido crítico y aprenden a moverse con mayor destreza a través de la escala de magnitudes que pueden ir desde un presupuesto gubernamental de billones de euros a describir propiedades de átomos y moléculas. Además, la memorización de los hechos se vuelve menos importante ya que se prima el desarrollo de las herramientas para resolver tales cuestiones. Resultan muy fáciles de plantear o buscar a través de Internet y pueden adaptarse a cualquier nivel educativo sin más que establecer unos enunciados acordes al nivel deseado. ¿Qué más se puede pedir?

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

La resolución de problemas de Fermi requiere pocos conocimientos matemáticos previos y con ellos se evalúa más la capacidad de pensar que unos conocimientos específicos de matemáticas. Sin embargo, tenemos que decidir unos conocimientos mínimos de los cuales partir, y éstos nos darán la pista sobre los núcleos temáticos en los cuales sería conveniente la introducción de este tipo de tareas. Éstos son, principalmente, los bloques de Números, Unidades y Geometría. En un bloque de Números podemos abarcar desde las operaciones aritméticas básicas y con grandes números, en un nivel más elemental, hasta la notación científica y los conceptos de aproximación y error, en otro más superior. En Geometría, estos problemas pueden empezar a usarse en cuanto el alumno sepa

8. Traducido de: Von Baeyer, H. C. (1988).

calcular áreas y volúmenes de figuras elementales. Por último, en ambas unidades puede ser necesario el manejo de las unidades de medida de longitud, superficie y volumen.

Para la introducción concreta de este tipo de tareas en el aula se pueden estructurar en varias fases, según vayamos aumentando el nivel de abstracción y generalidad en las preguntas. En una primera toma de contacto, se pedirá al alumno que estime diversas unidades de longitud, área y volumen:

- ¿Puedes abarcar con tus brazos una longitud de un metro? ¿Cuánto es, aproximadamente? ¿Y un hectómetro? ¿Y un centímetro?
- ¿Puedes dibujar en la pizarra una superficie de un m^2 (km^2, cm^2, etc.)? ¿Cómo sería, aproximadamente?
- ¿Cabría en el aula un volumen de m^3 (litro, km^3, cm^3, etc.)? ¿Cómo sería, aproximadamente?

En una segunda etapa se pueden plantear problemas de cálculo que el alumno tiene ante sí, usando elementos del aula, por ejemplo, que no requieren ningún tipo especial de conocimiento:

- ¿Cuántas baldosas hay en este suelo?
- Si quisiéramos cubrir la superficie de la mesa con lápices, ¿cuántos necesitaríamos para taparla por completo?
- ¿Cuántos ladrillos necesitaríamos para construir esa pared?
- ¿Cuántos brics de zumo necesitaríamos para llenar toda el aula?

Por último, podemos pasar a extrapolar esos cálculos a problemas que no están a su alcance de forma directa, empezando por los más concretos hasta llegar a problemas con una solución más abierta:

- ¿Cuántos segundos de vida llevarás a medianoche de hoy?
- ¿Cuántos litros de agua beberás a lo largo de tu vida?
- ¿Cuántos pelos tiene una persona en la cabeza?
- Si pusiésemos esos pelos uno detrás de otro, ¿qué longitud alcanzaría?
- ¿Cuál es el volumen de CO_2 exhalado por toda la población mundial al cabo de un día?

No queremos dejar pasar la oportunidad de recordar que los problemas de Fermi pueden estar referidos a cualquier disciplina y que su dificultad estará determinada por los conocimientos previos necesarios para resolverlos:

- (Química) ¿Cuál será el número de átomos que tiene un cuerpo humano?
- (Física) ¿La energía de cuántos yogures necesitamos para subir al Everest?

Por último, otra forma de introducir los problemas de Fermi en el ámbito escolar sería organizar un concurso individual o por equipos, bien como una prueba específica durante un evento concreto, como puede ser algún día especial dedicado a las ciencias o a las matemáticas, o bien organizado durante un periodo más largo de tiempo, por ejemplo

publicado como una sección de la revista del centro o a lo largo del curso escolar con preguntas de periodicidad semanal, mensual,…, cuyo ganador sería el que más puntuación acumule a lo largo del proceso. Como caso concreto, veamos la prueba sobre resolución de problemas de Fermi que se realiza en la *Science Olympiad*[9], en los EE.UU. En dicha prueba sólo se responde con el orden de magnitud de la solución, es decir, si en un problema se obtiene como resultado $3x10^7$, la respuesta sería 7. Si la mantisa es mayor o igual que 5 se le suma 1 al orden. Así, si se obtiene $5{,}03x10^3$, la respuesta sería 4. De esta forma, se otorgan 5 puntos si la respuesta es igual a la solución propuesta (es decir, si se acierta el orden), 3 puntos si se queda a un orden por encima o por debajo de la solución, 1 punto si se queda a dos órdenes y 0 puntos en otro caso. La puntuación total será la suma de todas las puntuaciones obtenidas en las diversas preguntas de las que consta la prueba. Como ya señalamos, en este contexto sí es necesario tener una solución previa con la que comparar las soluciones de los participantes. Pueden encontrarse fácilmente numerosos ejemplos, pero podemos empezar por los que encontramos resueltos paso a paso en el libro de Weinstein (2008) que figura en la bibliografía y otros, con la solución únicamente, en la web *www.fermiquestions.com.*

REFERENCIAS

Allison, S. K., Segré, E., Anderson, H. L. (1955). Enrico Fermi, 1901 – 1954. *Physics today.* 8 (1), 9.

Cajaraville, J.A. (2007). Estimación y aproximación. En Domínguez Castiñeiras, J.M. (ed.) *Actividades para la Enseñanza en el Aula de Ciencias. Fundamentos y Planificación*. Santa Fe (Argentina). Ediciones Universidad Nacional del Litoral. 35-77.

Fermi, L. (1954). *Átomos en mi familia. Mi vida con Enrico Fermi.* Alcoy: Marfil.

Poundstone, W. (2012). *Are You smart enough to work at Google?* Reino Unido: Oneworld.

Poundstone, W. (2007). *How would you move Mount Fuji*? Reino Unido: Time Warner Book Group.

Von Baeyer, H. C. (1988) . How Fermi would have fixed it. *The Sciences.* 28 (5), 2-4.

Weinstein, L., Adam, J. A. (2008). *Guesstimation. Solving the world's problem on the back of a cocktail napkin*. Princeton: Princeton University Press.

9. La *Science Olympiad* es una competición por equipos que se desarrolla a través de 23 pruebas de diversas disciplinas científicas en la que toman parte más de 6400 equipos de todos los EE.UU. Una de esas pruebas es la resolución de problemas de Fermi, correspondiente a alumnos de *High School* (15 a 19 años). Más información en *www.soinc.org*.