Seminario permanente de modelización matemática

Relaciones entre contexto, flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de Fermi. Un recorrido por lo que sabemos y una mirada al futuro

Irene Ferrando & Carlos Segura

Departamento de Didáctica de la Matemática (Universitat de València)

Estructura del seminario

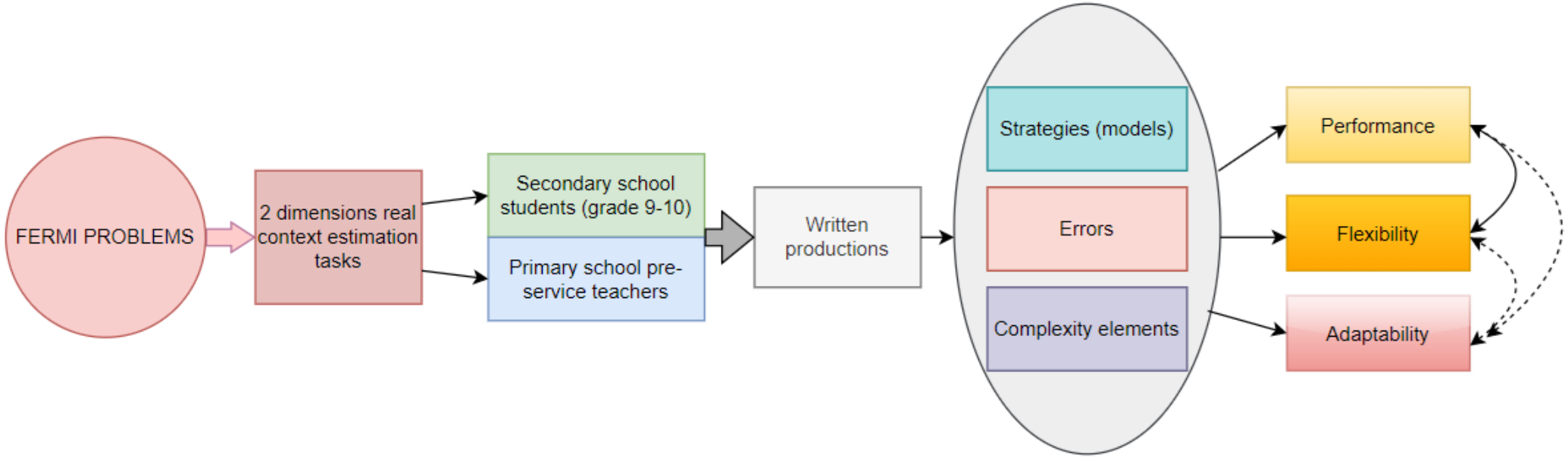
1. Diseño de secuencias de problemas de Fermi desde la perspectiva de las Multiple Solution Tasks.
2. Relación entre el contexto de los problemas de Fermi y los tipos de resolución.
3. Errores en la resolución de problemas de Fermi.
4. Rendimiento y flexibilidad en la resolución de problemas de Fermi.
5. Adaptabilidad en la resolución de problemas de Fermi.
6. Líneas de trabajo futuro

Primera parte

Diseño de secuencias de problemas de Fermi desde la perspectiva de las Multiple Solution Tasks

Visión general del tema

Algunos focos de interés en nuestra investigación sobre aspectos cognitivos del proceso de resolución de problemas de Fermi.

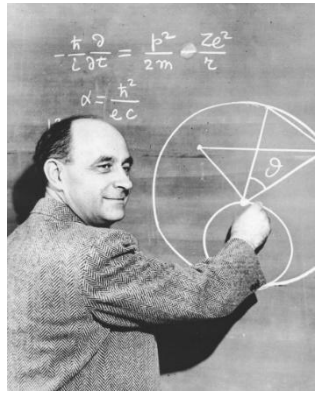









Problemas de Fermi (PF)



- Los PF se caracterizan por presentar una situación que ofrece poca o ninguna información concreta que dirija el proceso de resolución (Efthimiou & Llewellyn, 2006).

- Algunos ejemplos:
  - Estimar el número de coches en un atasco de 3 km en una autopista (Peter-Koop 2009);
  - Estimar con una aproximación el número de moléculas de hemoglobina que fabrica el cuerpo cada segundo (White 2004);
  - Estimar cuántos centros comerciales hay en Estados Unidos (Anderson & Sherman 2010).

¿Cuántas personas viven detrás de las ventanas iluminadas que veo desde mi habitación de hotel?

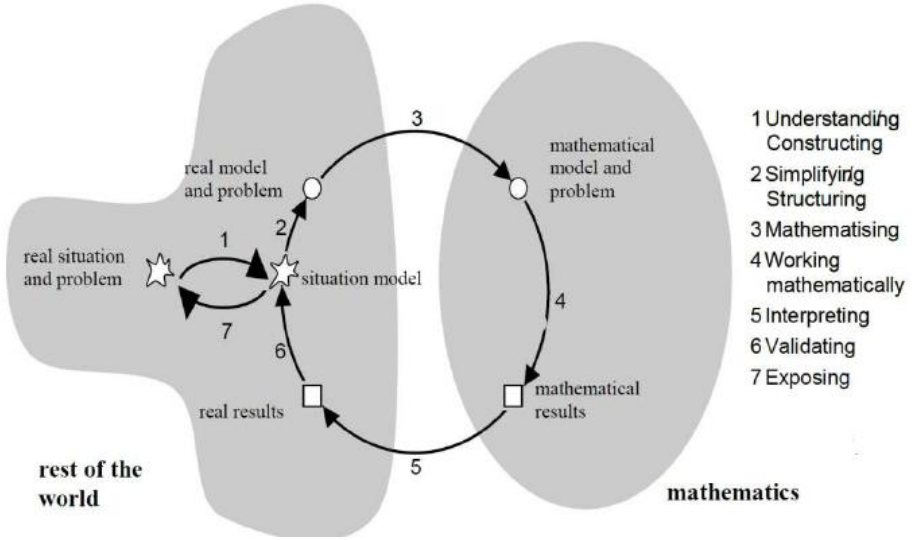


- Problemas reales, abiertos que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación para alcanzar una estimación (Ärlebäck, 2009), siguiendo el **método Fermi** (Arlebäck & Albarracín, 2019)

- Descomponer en subproblemas más sencillos.
- Cadena de conjeturas educadas y/o estimaciones parciales razonables hasta llegar a la estimación final.

Problemas de Fermi y modelización

- Entendemos por modelización matemática el proceso de resolución de problemas que abarca la matematización de un fenómeno del mundo real y la elaboración de un modelo matemático para describir, comprender o predecir el comportamiento o las propiedades del fenómeno estudiado.



- Siguiendo la definición de modelo matemático de Lesh & Harel (2003) como sistemas conceptuales que incluyen los procedimientos utilizados para crear construcciones, manipulaciones o predicciones útiles para alcanzar objetivos claramente reconocidos, los problemas de Fermi pueden considerarse "problemas de modelización en miniatura" (Robinson, 2008; Ärlebäck & Albarracín, 2019).

Problemas de Fermi 2D

- Nos centraremos en un subconjunto de los problemas de Fermi: aquellos presentan una situación real en la que debe estimarse un gran número de elementos en una superficie delimitada (PF-2D).

- Habilidades de medida y estimación de longitudes y áreas.

- Por accesibilidad son apropiados para introducir la modelización en las aulas de Primaria y Secundaria (Ärlebäck & Bergsten, 2010; Albarracín & Gorgorió, 2019).

¿Cuántas personas caben en Times Square en la fiesta de Nochevieja?



Modelización "en miniatura"

Simplificando la definición de modelo matemático de Lesh & Harel (2003) y del instrumento de análisis de Ferrando et al. (2017), una resolución se compone de:

- **Modelo inicial**: concepción del espacio del problema y de la distribución de los elementos.

- **Estrategia asociada**: cadena de procedimientos para obtener la estimación.

Pensemos en cómo resolver este problema…



Queremos organizar un concierto en el patio de la escuela para recaudar fondos para el viaje de final de curso,

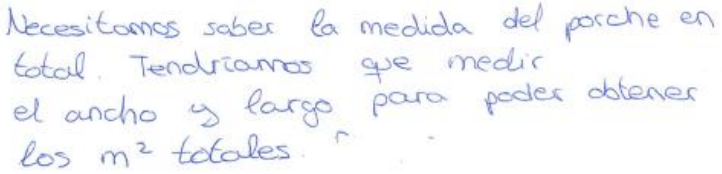
¿cuántas entradas podemos vender?

Tipos de resolución (modelo inicial + estrategia) para problemas de Fermi 2D

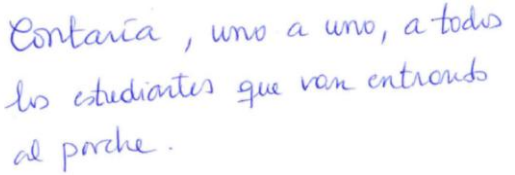
Análisis de las producciones escritas de estudiantes de Primaria (Ferrando & Albarracín, 2021), Secundaria (Albarracín et al., 2021; Ferrando et al., 2017) y de **futuros maestros** (Ferrando et al., 2020, 2021).

Incompleta. Faltan definir variables o relaciones entre variables que impiden un procedimiento claro para alcanzar la estimación.

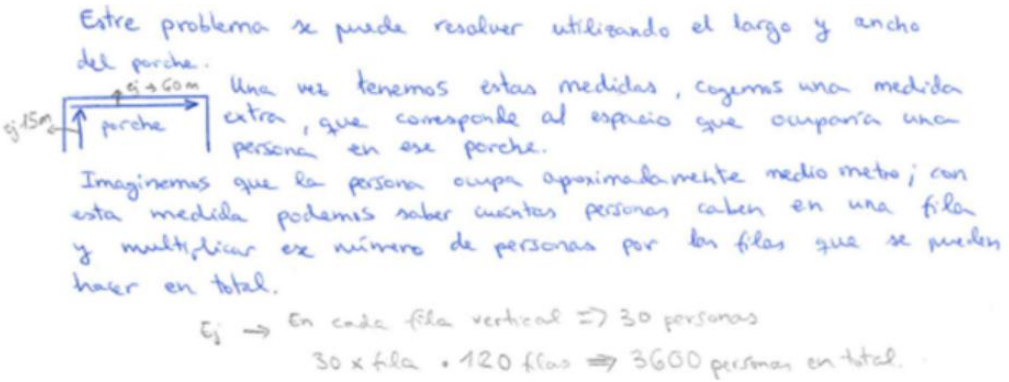




Recuento. solución directa, sin modelo matemático, implica simulación no realizable cuando la estimación es muy grande.



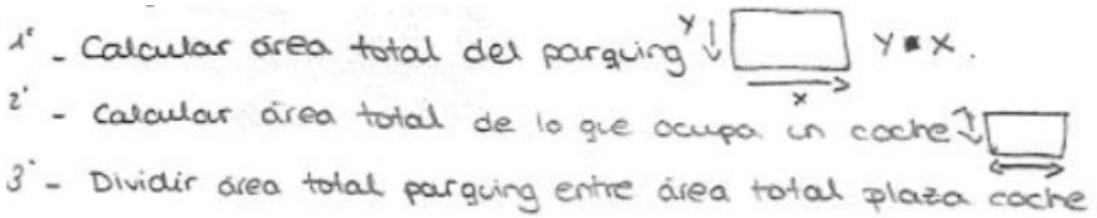
Linealización. *Se reduce un problema de Fermi 2D a dos problemas de Fermi 1D.* Resoluciones basadas en un modelo inicial de la distribución lineal; es decir, se disponen los elementos por filas y columnas. Se estima parcialmente su número (a lo ancho y largo) usando medidas de longitud, para terminar obteniendo la estimación total por producto cartesiano.



Tipos de resolución (modelo inicial + estrategia) para problemas de Fermi 2D

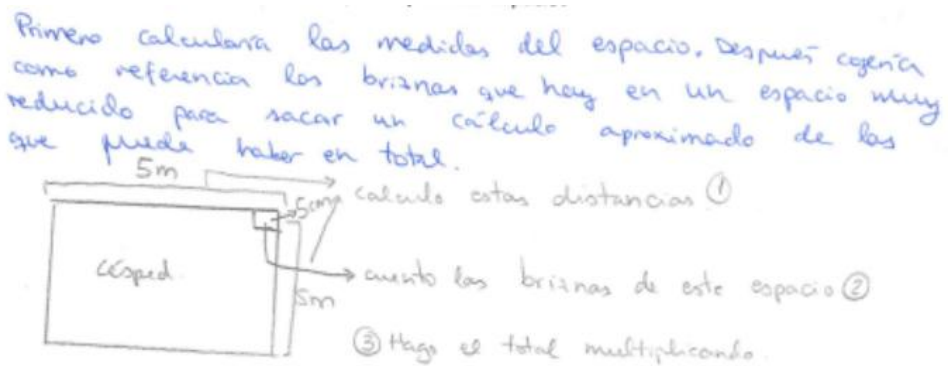
Unidad base. Resoluciones basadas en un modelo inicial bidimensional: se distribuyen los elementos por la superficie, considerando que cada elemento ocupa un área dentro del área total, y que por tanto, puede usarse como unidad de medida.

La estrategia asociada es, por tanto, dividir el área total entre el área ocupada por el elemento.



Densidad. Modelo inicial bidimensional: se distribuyen elementos por la superficie, considerando que ésta puede medirse con áreas unidad más pequeñas que permiten estimar el número de elementos por área unidad (densidad). Así, la razón de elementos/área total es la misma que la razón de elementos/área unidad.

La estrategia asociada es, por tanto, dividir el área total entre el área unidad y multiplicar por el número de elementos en el área unidad.



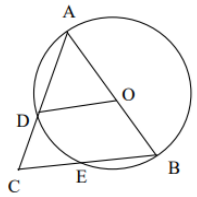
Multiple Solution Tasks

- Multiple Solution Tasks (MST) –problemas con diferentes resoluciones– pueden utilizarse como herramienta para estudiar la competencia y creatividad matemática, y en particular, la flexibilidad (Leikin & Lev, 2007; Levav-Waynberg & Leikin, 2012).

TASK:

AB is a diameter on circle with center O. D and E are points on circle O so that DO||EB .
C is the intersection point of AD and BE (see figure).

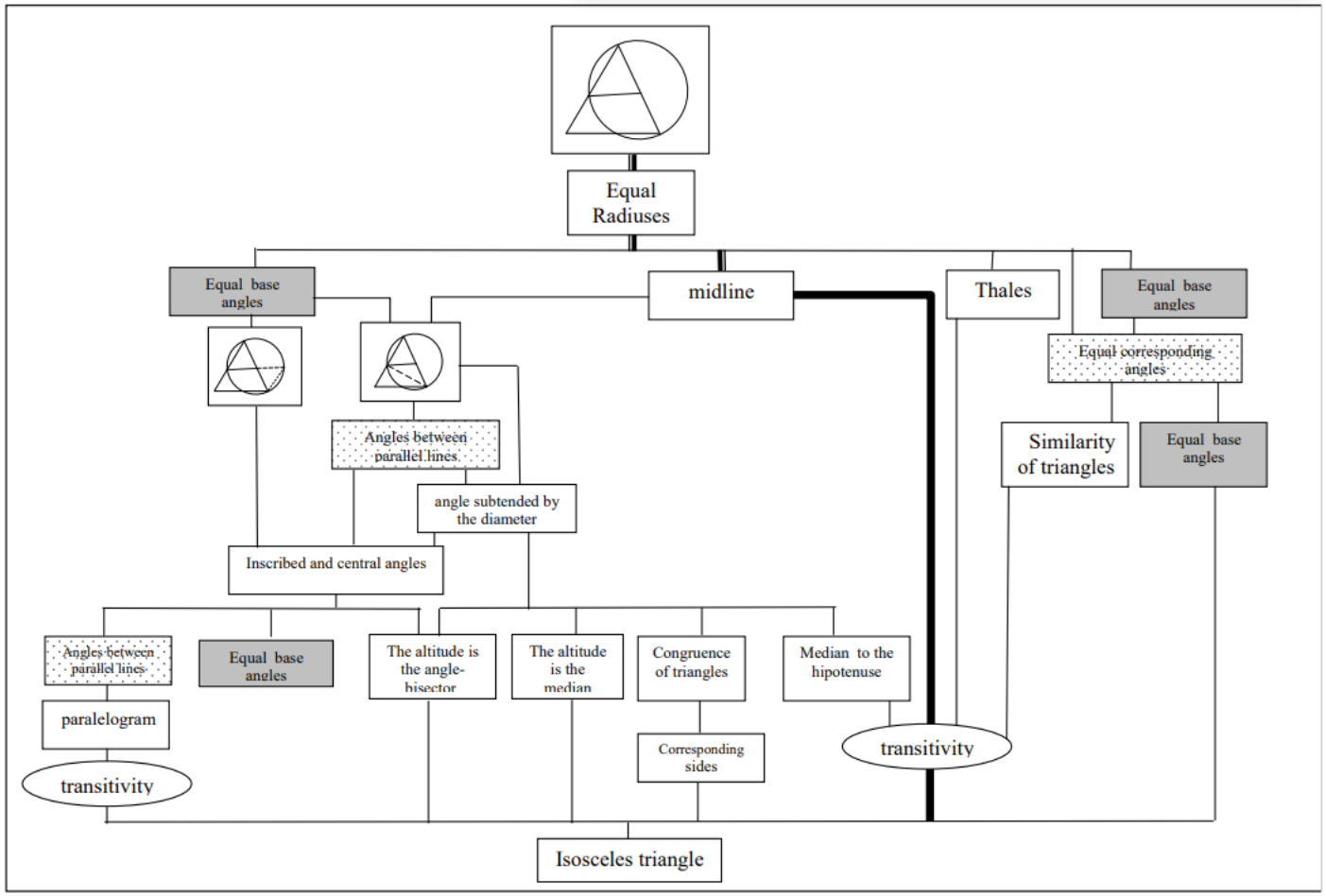
Prove ***in as many ways as you can*** that CB=AB



Espacio de soluciones:

- Colección de todas las resoluciones conocidas para un problema.

- Clasifica las distintas elecciones: de representación; de conceptos o propiedades matemáticos; de herramientas y procedimientos matemáticos (Levav-Waynberg & Leikin, 2012).



Problemas de Fermi 2D como MST

PF-2D como MST permite controlar todas las decisiones del resolutor. Primer paso para clasificar y comparar tipos de resolución.



International Journal of Science and Mathematics Education (2021) 19:1209–1227
https://doi.org/10.1007/s10763-020-10107-4

The Role of Context for Characterising Students' Strategies when Estimating Large Numbers of Elements on a Surface

Lluís Albarracín [1] · Irene Ferrando [2] · Núria Gorgorió [1]

Received: 10 July 2019 / Accepted: 2 June 2020 / Published online: 19 June 2020
© Ministry of Science and Technology, Taiwan 2020

Este estudio se centra en la construcción de un espacio de soluciones a partir de las resoluciones de estudiantes de secundaria (de 16 años) desarrollaron cuando se les requirió estimar el número de objetos sobre una superficie.

Con el fin de ampliar el abanico de estrategias de resolución de problemas, les presentamos una secuencia de tareas situadas en diferentes contextos de la vida real, pero que respondían todas a la misma demanda matemática, la estimación del número de objetos.

Las tareas planteadas a los alumnos eran un tipo de problemas de Fermi planteados inicialmente en contextos cercanos a su propia realidad, pero que se iban alejando progresivamente.

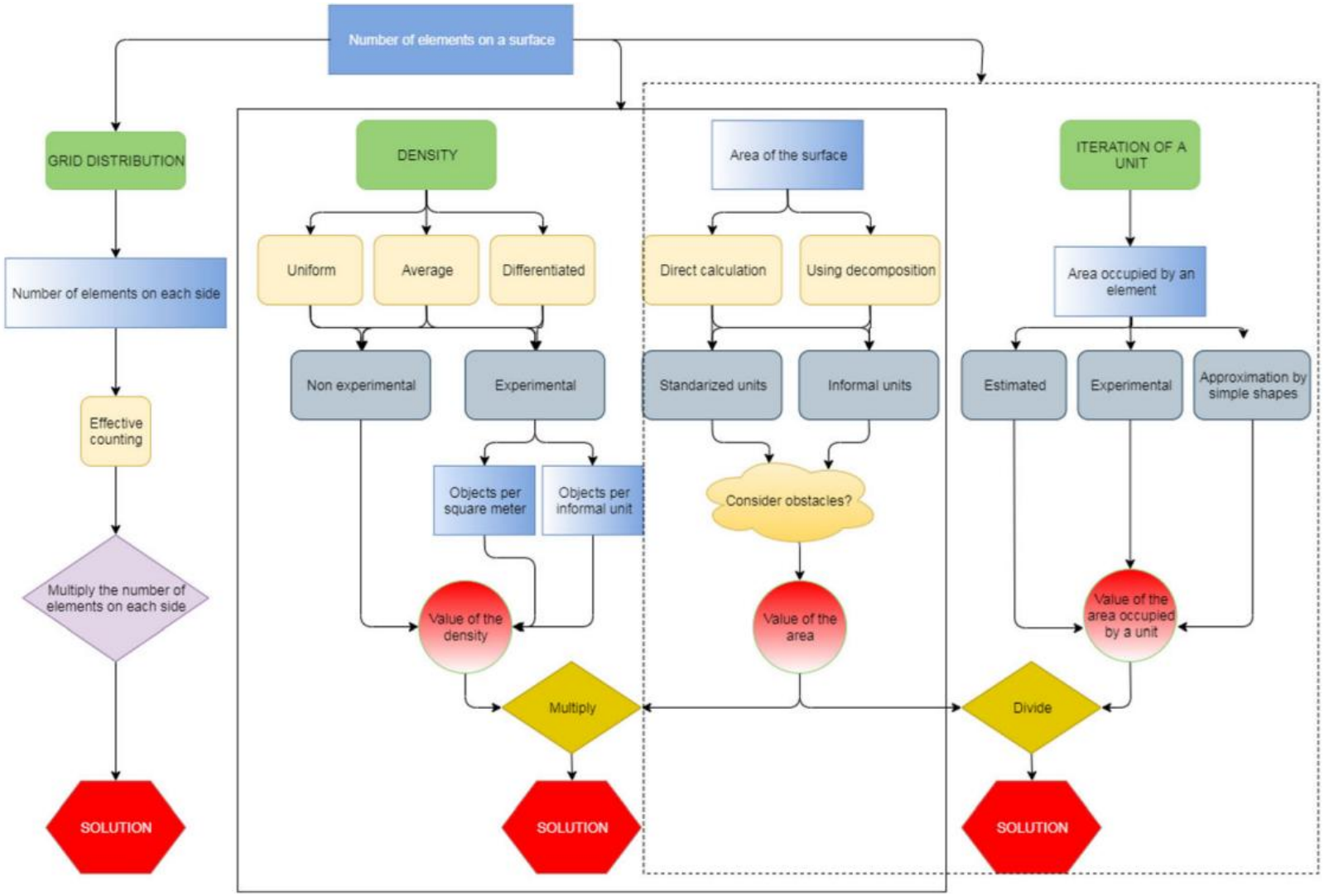
Problemas de Fermi 2D como MST

- Task A: Context: An end-of-year party will be held in the playground, including a concert, and we have to predict the maximum number of tickets that can be sold. Question: How many people would fit in the playground[1] if we held a concert there?
- Task B1: Context: Popular music groups use sports halls as venues where they can attract a large audience to their concerts. Therefore, it is necessary to determine their capacity in advance. How many people would fit at a concert held in the sports pavilion of the city where the school is located?
- Task B2: Context: The importance of a demonstration can be quantified by the number of people who support the protest. Question: How many people would fit in the main square of your city if a demonstration were held there?
- Task C: Context: City parks offer residents contact with nature. The quality of the parks depends on their size and, especially, on the number of trees. Question: How many trees are there in Central Park?

Participantes: 46 alumnos de 10º curso de dos colegios españoles divididos en 13 equipos de tres o cuatro alumnos cada uno.

Desarrollo: Los equipos trabajaron en la tarea A en una sesión de 90 minutos, primero en el patio y después en el aula para escribir sus procedimientos y soluciones. Durante la segunda lección, que duró 45 minutos, toda la clase compartió y debatió sus procedimientos y resultados para la tarea A. En la tercera lección, que duró 90 minutos, se presentaron a los estudiantes las tareas B1, B2 y C, como un conjunto.

Problemas de Fermi 2D como MST



Algunas ideas para las siguientes investigaciones a las que apunta el estudio…

- Podría existir cierta relación entre algunas características del contexto (*) y las resoluciones.
- Si las resoluciones están condicionadas por el contexto, es posible usar secuencias variando el contexto para estudiar flexibilidad.
- Estas tareas pueden promover la inclusión de “elementos de complejidad” (*realistic assumptions*) en las resoluciones.
- Se pueden comparar resoluciones: adaptabilidad (rapidez, rigor).

Decisiones : Representación espacio (modelo inicial 1D o 2D) / conceptos (proporción, medida, producto cartesiano) / procedimientos y herramientas.

Diseño de secuencia de PF por contraste de variables contextuales

- Primer paso, base de todos los estudios: diseñar una secuencia de PF que pueda usarse como MSTs al cambiar de un problema a otro.

- Nos basamos en la noción de variable de tarea de Kilpatrick (1978): formato, estructura sintáctica, contexto…

- Nos centraremos en las variables de contexto, entendidas como las características físicas del contexto real que pueden influir en el proceso de resolución (elecciones). El espacio de soluciones de Albarracín et al. (2021) permite identificar las siguientes, consensuando valores (Ferrando et al., 2020) en relación a las dimensiones humanas:

    - *Tamaño superficie ocupada por un elemento*: grande (más de 4 m^2), mediano (entre 1 m^2 y 4 m^2), pequeño (menos de 1 m^2).

    - *Tamaño de la superficie total*: grande (más de 1000 m^2), mediana (de 100 m^2 a 1000 m^2), pequeña (menos de 100 m^2).

    - *Forma de los elementos*: regular o irregular.

    - *Distribución de los elementos*: ordenada o desordenada.

    - *Forma de la superficie total*: simple (**rectangular**, triangular, …) o compuesta por formas simples.

Diseño de secuencia de PF por contraste de variables contextuales

"The island approach" (Blum & Niss, 1991) → "focus on sequences of modelling tasks that facilitate the development of learners' mathematical ideas and modelling competencies" (Ärlebäck & Doerr, 2015, p.293).

Model development sequences (Lesh & Doerr, 2003) MEA- MXA –MAA: Foco en la evolución/enriquecimiento de un modelo para problemas similares – VERTICAL ↓

Nuestro interés es comparar y analizar cambios de resoluciones (modelo + estrategia) para PF similares - HORIZONTAL.

- Diseño de secuencia de cuatro problemas a partir de la **variación por contraste** (Ko y Marton, 2004) de las variables de contexto.

Teoría variación: foco en qué es lo que varía y lo que permanece invariable en cualquier situación de aprendizaje (en particular, en la resolución de PF). La variación promueve que ciertos aspectos críticos aparezcan en primer plano, mientras que otros aspectos permanecen o pasan a un segundo plano, lo que ayuda a que los estudiantes disciernan dichos aspectos. Se pueden distinguir cuatro tipos de variación: contraste, generalización, separación y fusión (Marton et al., 2004).

La variación por contraste permite discernir un nuevo aspecto de un problema por comparación con otro similar en el que ese aspecto no ha variado.

Diseño de secuencia de PF por contraste de variables contextuales

Formato: enunciado e imagen.

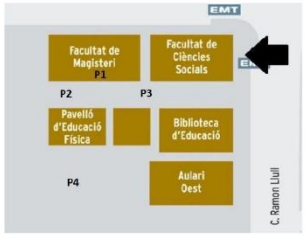








Contexto real, familiar para futuros maestros.



"Control" del contraste en la secuencia de PF.

Enunciado	Valor de las variables
P1 Personas. ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de la facultad si llueve?	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: desordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-pequeño Elemento ausente
P2. Baldosas. ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-grande Elemento presente
P3. Césped. ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: desordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: pequeño Elemento presente
P4. Coches. ¿Cuántos coches caben en este parking si no dejamos espacio para pasar?	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: ordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: grande Elemento ausente

Puesta en común de ideas…

- Hemos visto que los problemas que consisten en estimar el número de elementos en un recinto 2-dimensional acotado conducen a obtener diferentes soluciones (modelos+estrategias)…
- Cabe pensar si hay relación entre los modelos y las características del contexto real en que se formula el problema
- Algunos modelos implican razonar con magnitudes bidimensionales, incluso con magnitudes intensivas (áreas, densidad)… *¿Qué ocurre con el modelo 1-dimensional?*
- P1. Linealización agrupa varias estrategias en 1D. Describir y clasificar todos los tipos de resolución en 1D, 2D y 3D. Análisis de cómo se amplían las combinaciones modelo inicial y estrategia a medida que aumentan las dimensiones.

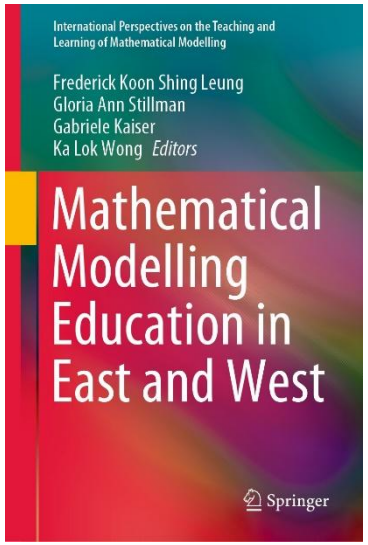
Castells, M. P., Ferrando, I., & Robledo, M. F. (2019). A grandes problemas, grandes soluciones. *Aula de innovación educativa*, (282), 44-48.

Segunda parte

Relación entre el contexto de los problemas de Fermi y los tipos de resolución

Relación variables contextuales y tipos de estrategia

Primary school pre-service teachers | Strategies (models)



Chapter 10
Analysis of the Relationship Between Context and Solution Plan in Modelling Tasks Involving Estimations

Irene Ferrando, Carlos Segura, and Marta Pla-Castells

Abstract In this chapter we analyse students' written solution plan of a sequence of modelling tasks involving estimations. Our research objective is to statistically analyse whether there is a relation between the solution plan and the characteristics of the context of the real estimation task. From previous work, we have identified some task variables that are directly related to the context. In this study we have designed a sequence of modelling tasks and we have analysed the productions of $N = 224$ Spanish pre-service primary school teachers. The results show that there is a relationship between the variables of the task and the solution plan used by the students in each case. From the results of this study, we derive conclusions regarding the characterisation of this kind of modelling task and the potential use of this sequence to promote problem solving flexibility.

Keywords Context variables · Estimation · Modelling · Pre-service teacher · Task variables · Solution plan

Pregunta de Albarracín et al. (2021): el objetivo de este estudio es analizar si existe una relación entre las características del contexto de los PF-2D y los tipos de resolución desarrollados por los futuros maestros de primaria.

¿Por qué trabajar con futuros maestros?

- Competencia y conocimiento matemático del docente tiene impacto en el rendimiento de los estudiantes (Baumer et al. 2010). MKT: conocimiento contenido para la enseñanza (Ball et al., 2008). En concreto, conocimiento de problemas y su resolución (Chapman, 2013). Conocimiento en modelización (Arcos et al., 2018).

- Accesibilidad de los PF para introducir modelización en Primaria (Albarracín & Gorgorió, 2019). Su implementación exitosa depende de la competencia del maestro, que antes debe ser buen resolutor (Thompson, 1985).

Relación variables contextuales y tipos de estrategia

Primary school pre-service teachers | Strategies (models)

Experiencia

- N = 224 futuros maestros, trabajo individual en el aula, se demanda que produjeran un plan de resolución (explicar con claridad, paso a paso, el proceso para obtener la estimación que demandan los problemas, pero no es necesario que realicen los cálculos numéricamente).

- Se utiliza la secuencia de PF diseñada por contraste de las variables de contexto.

Categorización de los tipos de resolución

- Se utilizan categorías (simplificadas: incompleta, recuento, linealización, unidad base, densidad) clasificadas por Albarracín et al. (2021) para Primaria y Secundaria.

- Se comprueba que se extienden a futuros maestros mediante acuerdos por triangulación entre tres investigadores (Denzin, 2009), con fiabilidad alta (k= 0.78).

- *Variables nominales*: problema (ligado a elección de variables contextuales) y resolución.

Relación variables contextuales y tipos de estrategia

Primary school pre-service teachers

Strategies (models)

Resultados

Análisis descriptivo y cualitativo de los 896 tipos de resolución de los futuros maestros.
La mayoría utiliza Unidad base, seguido de Densidad y Linealización.
El análisis confirma y extiende análisis de Ferrando y Albarracín (2021) por etapas educativas⊚ Unidad base y Densidad se vinculan con mayor madurez matemática.

Table 10.2 Classifications and frequency of student productions for each problem ($n = 224$)

Task	Incomplete	Counting	Linearisation	2D-base unit	2D-density
P1 People	34 (15.2%)	1 (0.4%)	28 (12.5%)	110 (49.1%)	51 (22.8%)
P2 Tiles	34 (15.2%)	6 (2.7%)	92 (41.1%)	71 (31.7%)	21 (9.3%)
P3 Grass	44 (19.6%)	2 (0.9%)	15 (6.7%)	67 (29.9%)	96 (42.9%)
P4 Cars	28 (12.5%)	4 (1.8%)	31 (13.9%)	160 (71.4%)	1 (0.4%)
Total	140 (15.6%)	13 (1.5%)	166 (18.5%)	408 (45.5%)	169 (18.9%)

- Utilizando el test Ji-Cuadrado de independencia de variables nominales, se obtiene $\chi^2 = 267.129$ y LR = 272.693 con $p < 0.0001$, rechazando hipótesis nula.

- Además, el coeficiente de contingencia de Pearson es 0.511 (efecto fuerte) y la V de Cramer es 0.343 (medio-fuerte).

➢ Existe una relación entre contexto de los PF y tipo de resolución con tamaño de efecto medio-alto.

Relación variables contextuales y tipos de estrategia

Primary school pre-service teachers | Strategies (models)

Conclusiones

- Los problemas de Fermi en los que hay una clara distribución ordenada de los elementos cuyo número debe ser estimado influyen en resoluciones basadas en la Linealización, especialmente si el patrón de orden es visible (los elementos están presentes) y los elementos son pequeños y con forma regular (*P2- Adoquines*).

- Los problemas de Fermi en los que hay una clara distribución desordenada de los elementos, su forma es irregular se relacionan con un uso alto de resoluciones basadas en la Densidad, especialmente cuando el tamaño de los elementos es pequeño (*P3- Césped*).

- Los problemas en los que el tamaño de la superficie que ocupan los elementos es grande se relacionan con resoluciones basadas en la Unidad base, como ocurre en *P4- Coches.*

- En general, la Unidad base es el método más utilizado, lo que explica que en problemas con tamaños medios de los elementos y un orden/desorden no demasiado manifiesto, como ocurre con *P1- Personas*, sea el tipo de resolución más utilizado.

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento



Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation

Irene Ferrando · Carlos Segura · Marta Pla-Castells

Published online: 8 September 2020
© Ontario Institute for Studies in Education (OISE) 2020

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

El primer objetivo de este estudio era **validar** la relación entre características del contexto de los PF y tipo de estrategia, replicando la experiencia con otros 81 futuros maestros resolviendo otra secuencia equivalente desde el punto de vista de las variables contextuales.

Además, se introdujeron cambios en las variables de estructura sintáctica y semántica del enunciado de los problemas, incrementado su complejidad textual, con el (segundo) objetivo de **estudiar si dicha complejidad en los enunciados influye en el rendimiento (éxito) de los futuros maestros al resolverlos.**

De este manera, se explora un aspecto más de la competencia de los futuros maestros en resolución de problemas reales.

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

Los (futuros) maestros deben conocer y dominar la resolución de problemas variados en características como su complejidad sintáctica o el tipo de contexto (Silver & Thompson, 1984).

- La comprensión del texto del problema se ve influida por su estructura sintáctica, por ejemplo, Jerman (1974) o Moyer et al. (1984) identifican factores como la longitud del texto y cantidad de información, su complejidad gramatical, o el orden en el que se presenta la información.

- También por su estructura semántica: cómo se codifican las relaciones entre las variables, es decir, si son dependencias directas o indirectas (Nesher et al., 1982; De Corte & Verschaffel, 1987).

- Silver y Smith (1980) señalaron que la dificultad para desarrollar estrategias puede estar relacionada con la atención a detalles contextuales. Dificultades con situaciones narrativas largas y detalladas, que introducen información superflua (Moyer et al., 1984; Orrantia et al., 2014).

- Dificultad con situaciones que presentan acciones implícitas o hipotéticas (Silver & Thompson, 1984), con situaciones que requieran una terminología o lenguaje más formales (Leiß et al., 2019). Albarracín et al. (2022) encontraron mayor dificultad con problemas reales en contextos lejanos, es decir, ajenos a su experiencia.

La mayoría de estudios sobre este tema se han realizado con problemas verbales y estudiantes. ¿Qué ocurre con los problemas reales y futuros maestros?

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

Para confirmar la relación de dependencia entre las variables de contexto y las estrategias de resolución, diseñamos una secuencia *P1'-P2'-P3'-P4'* equivalente a la anterior en la que, sin embargo, cambiamos la variable de estructura textual (sintáctica y semántica).

Problemas de la secuencia 2	**Valor de las variables de contexto**	**Cambio en variable de estructura respecto a secuencia 1**
P1'- Llaves robadas	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: desordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-pequeño	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica. Añade ambigüedad a la pregunta.
P2'- Ladrillos pintados	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-grande	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica. Pregunta indirecta.
P3'- Palomitas	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: desordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: pequeño	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica.
P4'- Tablao flamenco	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: ordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: grande	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica.

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

P2- Adoquines. ¿Cuántos adoquines hay entre la Facultad de Magisterio y el gimnasio?



P2'- Ladrillos pintados. La decana de la Facultad de Magisterio quiere dar un toque de color al edificio del Aulario y ha decidido poner unos andamios en el muro norte para que cada alumno de Magisterio pinte como quiera uno de los ladrillos grises de la fachada. Eso sí, cada alumno pintará solo un ladrillo. ¿Cuántos alumnos podrán participar?



P2'- Ladrillos pintados	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-grande	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica. Pregunta indirecta.

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

Experiencia

- N = 81 futuros maestros, trabajo individual en el aula, se demanda que produjeran un plan de resolución (explicar con claridad, paso a paso, el proceso para obtener la estimación que demandan los problemas, pero no es necesario que realicen los cálculos numéricamente).

- Se utiliza la secuencia alternativa de PF diseñada por contraste de las variables de contexto, equivalente a la inicial.

Categorización de los tipos de resolución

- Categorización mediante acuerdos por triangulación entre tres investigadores con fiabilidad alta (k= 0.71).

- *Variables nominales*: problema (ligado a elección de variables contextuales) y tipo resolución.

- Primera aproximación (básica) al estudio del rendimiento a partir de producciones categorizadas como Incompleta. Se define éxito en un problema cuando el resolutor desarrolla una resolución completa (con independencia de posibles errores en el desarrollo).

Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

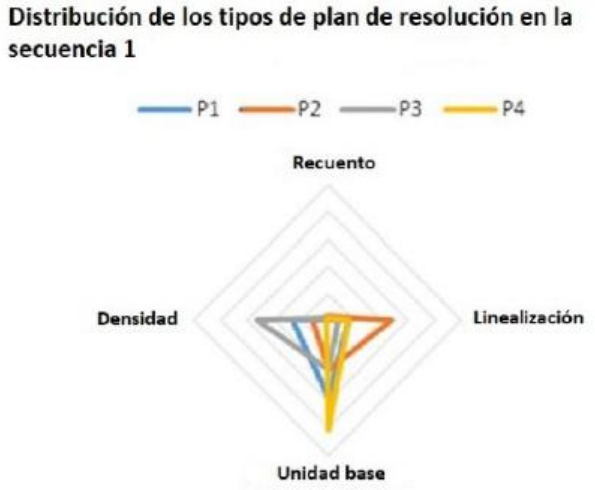
Resultado 1. Validación de la relación entre contexto y tipo de resolución

Tableau 2 Distribution des résolutions par catégories pour chaque problème de la séquence 1

		Comptage	Linéarisation	2D-unité de base	2D-densité	Total
P1	Fréquence	1	28	110	51	190
	% dans P1	0,5%	14,7%	**57,9%**	26,8%	100,0%
P2	Fréquence	6	92	71	21	190
	% dans P2	3,2%	**48,4%**	37,4%	11,1%	100,0%
P3	Fréquence	2	15	67	96	180
	% dans P3	1,1%	8,3%	37,2%	**53,3%**	100,0%
P4	Fréquence	4	31	160	1	196
	% dans P4	2,0%	15,8%	**81,6%**	0,5%	100,0%
Total	Fréquence	13	166	408	169	756
	% du total	1,7%	22,0%	54,0%	22,4%	100,0%

Tableau 3 Distribution des résolutions par catégories pour chaque problème de la séquence 2

		Comptage	Linéarisation	2D-unité de base	2D-densité	Total
P1'	Fréquence	2	9	25	25	61
	% dans P1'	3,3%	14,8%	**41,0%**	**41,0%**	100,0%
P2'	Fréquence	10	36	14	4	64
	% dans P2'	15,6%	**56,3%**	21,9%	6,3%	100,0%
P3'	Fréquence	2	4	25	39	70
	% dans P3'	2,9%	5,7%	35,7%	**55,7%**	100,0%
P4'	Fréquence	1	8	61	5	75
	% dans P4'	1,3%	10,7%	**81,3%**	6,7%	100,0%
Total	Fréquence	15	57	125	73	270
	% du total	5,6%	21,1%	46,3%	27,0%	100,0%





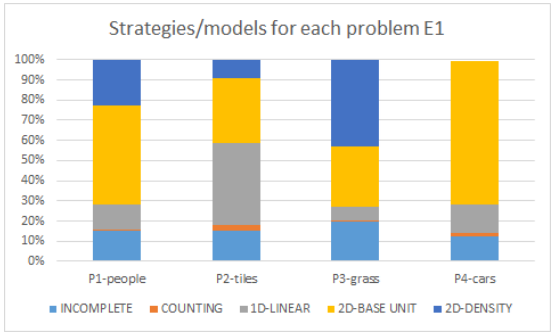
Se mantiene la misma relación significativa entre características del contexto y tipos de plan de resolución $\chi^2 = 143.526$ y LR = 135.953 con $p < 0.0001$.

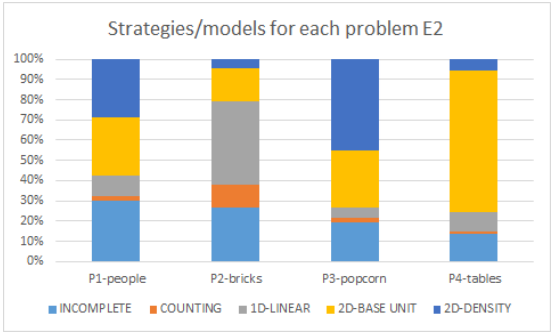
Contexto, enunciado, tipos de estrategia y rendimiento

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Performance

Resultado 2. Influencia de la complejidad textual del enunciado de los PF en el éxito (rendimiento)

	P1-P1’	P2-P2’	P3-P3’	P4-P4’
Proporción de éxito	84,7%-70%	84,7%-73%	80,3%- 80,4%	87,5%- 86,2%





Prueba z de contraste unilateral derecho de proporciones:la hipótesis nula puede rechazarse para los pares de problemas P1-P1' (con z=2,9503 y p=0,00159) y P2-P2' (con z=2,3035 y p=0,01072).

- P1’ – Situación narrativa ambigua ⊚ Aumenta proporción de incompletas respecto P1.
- P2’ – Pregunta indirecta ⊚ Aumenta proporción de incompletas respecto P2.
- P3’ y P4’ – Mayor complejidad sintáctica ⊚ Sin efecto.

- En futuros maestros, confirma el trabajo Leiss, Plath y Schwippert (2019) sobre cómo afecta la inclusión de información que añade ambigüedad a lo que se pregunta.
- Confirma dificultades con problemas en los que la acción es implícita en el enunciado o la pregunta es indirecta (Silver y Thompson, 1984; Escolano-Vizcarra et al., 2012).
- Confirma Moyer et al. (1984) sobre que la sintaxis sencilla no influye en el desempeño de los estudiantes.

Discusión sobre los resultados presentados en esta sección…

- Hemos mostrado que, efectivamente, las características del contexto influyen en la resolución del problema de estimación
- Hemos identificado que el formato del enunciado (en relación a la complejidad textual) tiene cierto efecto en el rendimiento.

¿Cómo completar esta parte del estudio?

- P2. Ampliar el estudio sobre efecto de la complejidad del enunciado (sin datos, con abundancia de datos, etc.). Limitación al no analizar la comprensión lectora. Abordar su relación con otras variables de tarea: soporte, etc.
- P2. Estudiar relación de contexto y tipo de resolución con otros problemas de Fermi u otros problemas de modelización.

Krawitz, J., Chang, Y. P., Yang, K. L., & Schukajlow, S. (2022). The role of reading comprehension in mathematical modelling: improving the construction of a real-world model and interest in Germany and Taiwan. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 337-359.

Tercera parte

Errores en la resolución de problemas de Fermi

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors



Article

Classification and Analysis of Pre-Service Teachers' Errors in Solving Fermi Problems

Carlos Segura * and Irene Ferrando

Department of Didactics of Mathematics, University of Valencia, 46022 Valencia, Spain; irene.ferrando@uv.es
* Correspondence: carlos.segura@uv.es

Abstract: Fermi problems are useful for introducing modelling in primary school classrooms, although teachers' difficulties in problem solving may hinder their successful implementation. These difficulties are associated with the modelling process, but also with the estimation and measurement skills required by Fermi problems. In this work, a specific categorization of errors for Fermi problems was established, and it allowed us to analyse the errors of N = 224 pre-service primary school teachers. The results showed that prospective teachers make a large number of errors when solving this type of task, especially conceptual ones, which are associated with the process of simplifying/structuring the real situation and the mathematization process. They also showed that there is a significant relationship between the characteristics of the problem context and the error categories. Knowing the types of errors that prospective teachers make and designing task sequences that make them emerge so that prospective teachers learn from them could be an effective way to improve initial teacher education in modelling and estimation problem solving.

Con la mirada puesta en **refinar el anterior análisis del rendimiento en resolución de problemas de Fermi**…

El objetivo de este trabajo es estudiar los errores que cometen los futuros maestros cuando se enfrentan a la resolución de una secuencia de problemas de Fermi 2D:

1) Establecer una categorización y clasificación de los errores específicos para este tipo de problemas.

2) Utilizarla para para identificar la existencia de una relación entre el tipo de error cometido y las características contextuales de los problemas de Fermi.

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Los problemas de Fermi 2D requieren:

- Competencia en el proceso de modelización (identificación de variables en una situación y de sus relaciones, matematización, trabajo matemático, interpretación del resultado);

- Por la naturaleza de la situación real planteada, también requieren el dominio del sentido y habilidades de la medida y estimación de magnitudes espaciales (longitud, área).

Algunos trabajos previos sobre errores y dificultades en modelización

Kaiser et al. (2010): dificultades en la comprensión de las situaciones reales a modelizar y también en la determinación de la relación entre la situación real y los conocimientos matemáticos necesarios para su solución.

Crouch y Haines (2007): 4 tipos principales de errores y dificultades en la resolución de una tarea de modelización: inconsistencia; modelo inapropiado; desarrollo matemático incorrecto o incompleto; fallo en la validación.

Klock & Siller (2020): categorización exhaustiva que proporciona una visión general de las dificultades en cada etapa del ciclo de modelización.

Moreno et al. (2021): adaptación de la categorización de Crouch & Haines y la aplicaron en el análisis de las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria ante una tarea de modelización.

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Tabla 2-4.: Sistema de categorías de errores en el proceso de modelización (Moreno, Marín y Ramírez-Uclés, 2021, p.121)

Categoría	Valores de la categoría
Error de simplificación	Modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad. Modelo real incompleto por incoherencias en las relaciones entre los elementos de la realidad considerados. No se elabora una función objetivo para el modelo real. No construye un modelo real
Error de matematización	Modelo matemático incoherente con el real. Modelo matemático incompleto. No se construye un modelo matemático.
Error de resolución	Errores conceptuales. Errores procedimentales. Resolución incompleta.
Error de interpretación	No se interpretan los resultados. No identificar o plantear posibles limitaciones del modelo.

Table 1.3 Difficulties in the modelling process (Klock & Siller, 2020)

Categories (modelling steps)	Subcategories (modelling sub-processes)
1. Forming a real-world model	1.1 Fail to understand the context[a, d]
	1.2 Fail to understand the task[b, d]
	1.3 Fail to search for missing information[c, d]
	1.4 Fail to identify relevant variables[a, b]
	1.5 Fail to make meaningful and simplifying assumptions[a, c]
	1.6 Fail to understand a foreign language[e]
	1.7 Calculating without including the context[d]
2. Forming a mathematical model	2.1 Fail to define variables[a]
	2.2 Fail to realise dependencies between variables[a]
	2.3 Fail to use adequate mathematical methods to mathematise[a]
	2.4 Fail to use technologies[a]
	2.5 Fail to understand the situation/mathematics conceptually[d]
	2.6 Fail to understand mathematical contents[e]
3. Working mathematically	3.1 Fail to use adequate formulae[a]
	3.2 Fail to use adequate solution strategies and algorithms[a, d]
	3.3 Fail to use technologies[a]
	3.4 Fail to understand the situation/mathematics conceptually[c]
	3.5 Fail to solve the model due to an excessive complexity[d]
	3.6 Fail to convert units[d]
4. Interpreting	4.1 Fail to identify the correct meaning of aspects of the mathematical results/model[a, d]
	4.2 Fail to answer the question with the help of the mathematical results[d]
5. Validating	5.1 Fail to reconcile (interim-)results with the real situation[a]
	5.2 Fail to identify the influence of constraints/real world aspects on the mathematical results[a]
	5.3 Fail to find opportunities to improve the model[d]
	5.4 Fail to validate including all relevant aspects[d]

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Algunos trabajos previos sobre errores y dificultades en estimación y medida de magnitudes espaciales

Según Hildreth (1983), el sentido de la medida y estimación de magnitudes incluye distintas habilidades:

- compresión y percepción de la magnitud, comprensión del concepto de unidad de medida;
- tener una imagen mental de la unidad de medida y de referentes que se van a usar en el proceso de medida o estimación;
- adecuar la unidad de medida a lo que se va a medir o estimar;
- conocer y utilizar términos adecuados del proceso de medida;
- uso de estrategias apropiadas para medir y estimar;
- verificar la adecuación de la estimación.

A partir de estos procesos (Baturo & Nason, 1996), y con el foco en estimación y medida de longitudes y áreas, Castillo-Mateo (2012) y Castillo- Mateo et al. (2012) desarrollan una clasificación de errores y dificultades.
Hagena (2015) destaca la importancia de la medida y la estimación en los problemas de modelización.

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Tabla 2-5.: Tipos de error en el proceso de estimación de longitudes y superficies (Castillo y cols., 2012)

Tipo de error	**Carácter**	**Relación con el proceso de estimación**
E1. Error de cálculo en las operaciones	Procedimental	Extrínseco
E2. Error de percepción de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E3. Error de significado de términos propios de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E4. Ausencia de unidades de medida	Conceptual	Extrínseco
E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas	Conceptual	Extrínseco
E6. Error de conversión de unidades de medida	Procedimental	Extrínseco
E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E8. Interiorización inadecuada de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E9. Error en la comparación de cantidades	Procedimental	Intrínseco
E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos	Procedimental	Extrínseco

Errores en problemas de Fermi

Categoría	Tipos de error de la categoría	
Error de simplificación	E1. Modelo inicial incompleto asociado a la falta de consideración de aspectos (variables, relaciones, etc.) de la situación real. E2. Modelo inicial incorrecto debido a un error de percepción de la magnitud. E3. Modelo inicial incorrecto debido a una inadecuada interiorización de los referentes de la magnitud a estimar. E4. No construye un modelo inicial.	Conceptual
Error de matematización	E5. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial debido a un error de significado de términos propios de la magnitud. E6. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por inadecuada interiorización de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar. E7. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por el uso de unidades de medida inadecuadas. E8. El modelo matemático no se construye o es incompleto porque no se cuantifican variables o relaciones del modelo inicial.	Conceptual
Error de trabajo matemático	E9. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos o errores de cálculo. E10. Error en la conversión de unidades de medida. E11. Procedimientos incompletos.	Procedimental
Error de interpretación	E12. Ausencia de unidades de medida en los resultados. E13. La estimación es claramente incompatible con la situación real.	Conceptual

Primary school pre-service teachers

Errors

Experiencia y categorización

N = 224 futuros maestros resolviendo la secuencia de PF.

Sistema de errores específico para Problemas de Fermi -2D:

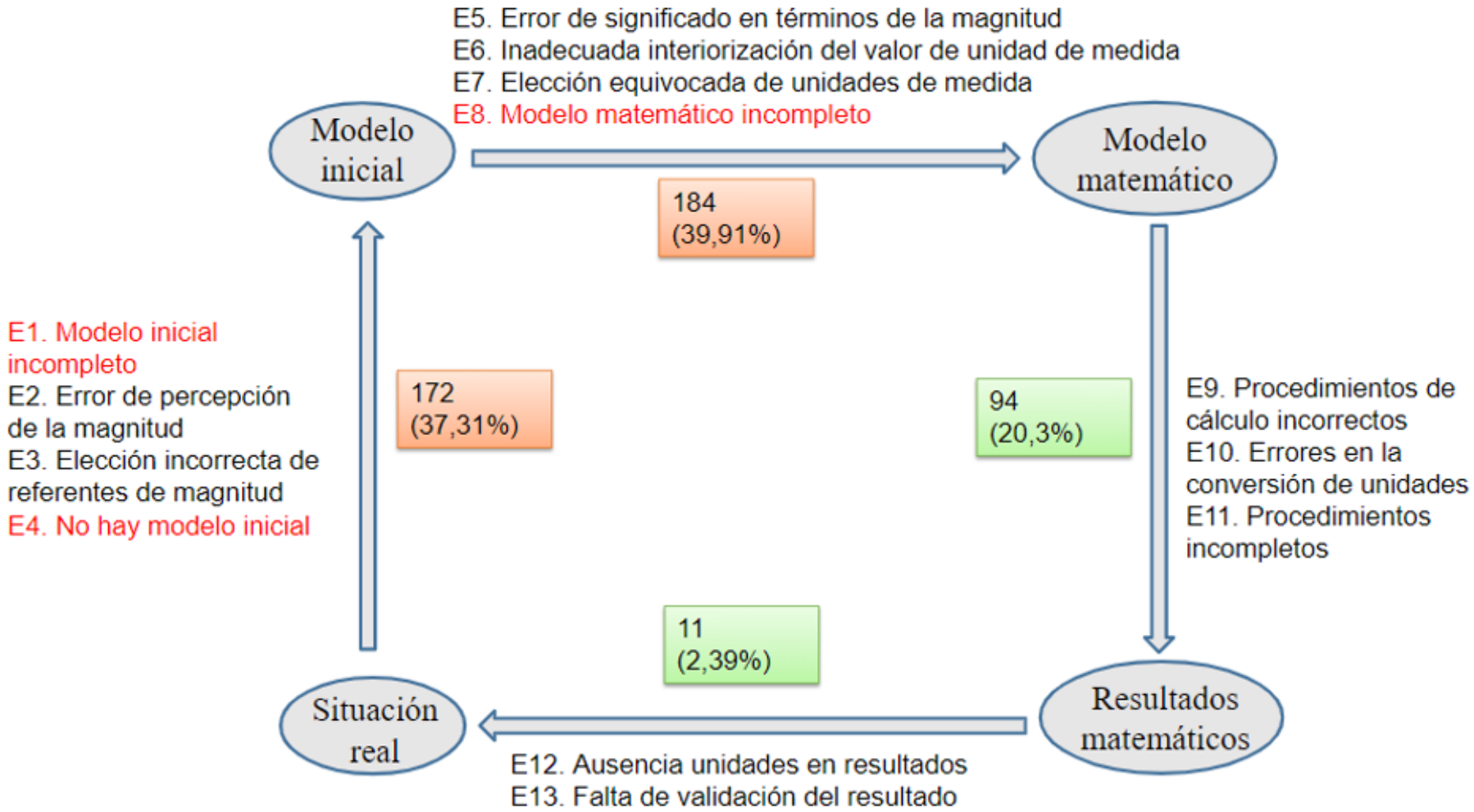
- A partir de un análisis previo cualitativo (errores emergentes) de una submuestra de las 896 producciones de futuros maestros;
- Y de una síntesis de las categorías de trabajos previos sobre errores en modelización y medida.

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Resultados



Futuros maestros cometen una media de 2 errores durante la resolución de la secuencia de PF. Un tercio de esos errores interrumpen el ciclo de modelización (graves: conducen a resoluciones Incompletas).

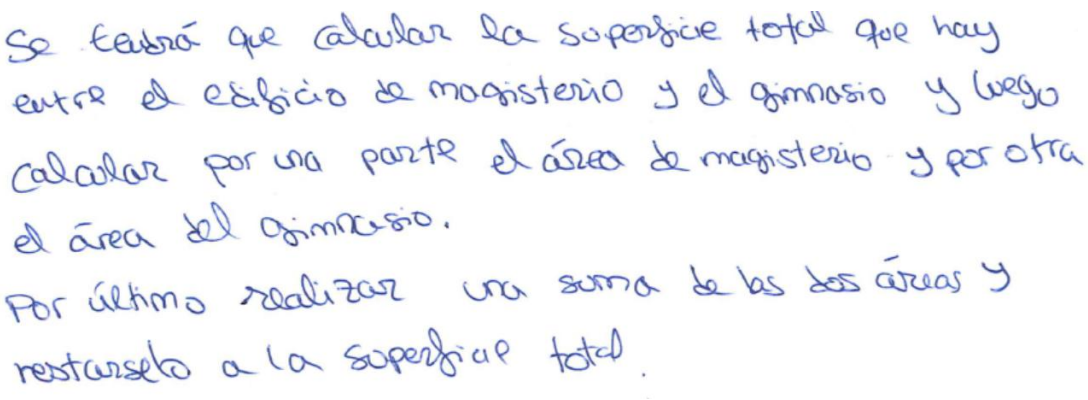
Errores en problemas de Fermi

Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

Primary school pre-service teachers

Errors

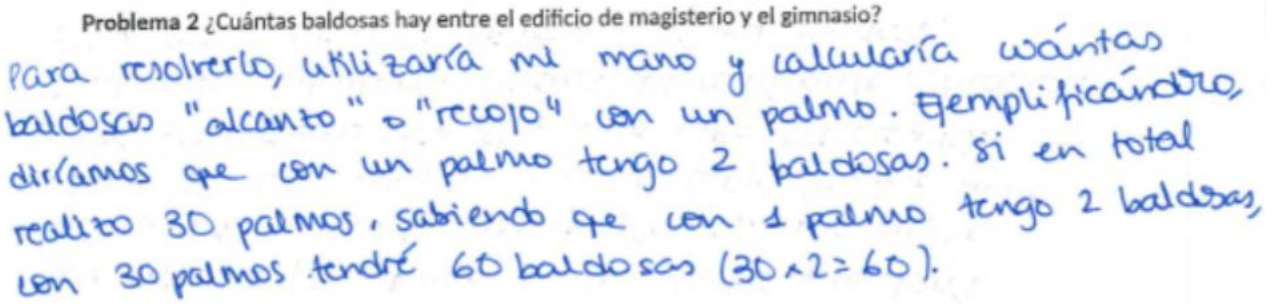
1. Errores de simplificación (37.31%)


Se tendrá que calcular la superficie total que hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio y luego calcular por una parte el área de magisterio y por otra el área del gimnasio.
Por último realizar una suma de las dos áreas y restarselo a la superficie total.

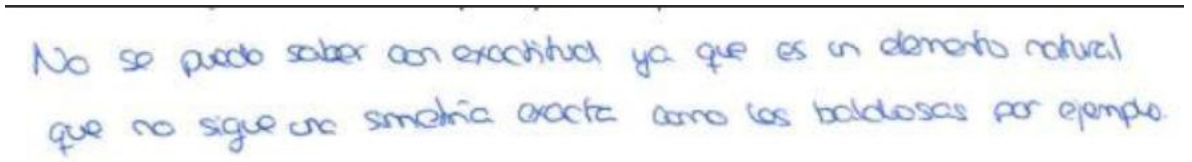
E1. *Modelo inicial incompleto.*
Falta variable (tamaño adoquines, o densidad, etc.) y relación entre variables.


Calcular el volumen medio de una persona y calcular el volumen del porche y deducirlo

E2. Modelo inicial incorrecto por error de percepción de magnitud. Confusión área y volumen.


Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?
Para resolverlo, utilizaría mi mano y calcularía cuántas baldosas "alcanto" o "recto" con un palmo. Ejemplificándolo, diríamos que con un palmo tengo 2 baldosas. Si en total realizo 30 palmos, sabiendo que con 1 palmo tengo 2 baldosas, con 30 palmos tendré 60 baldosas (30×2=60).

E3. Incorrecta imagen mental de un referente a estimar.
Tanto la distancia como el palmo no están bien interiorizados.


No se puede saber con exactitud ya que es un elemento natural que no sigue una simetría exacta como las baldosas por ejemplo

E4. *No hay modelo inicial.*

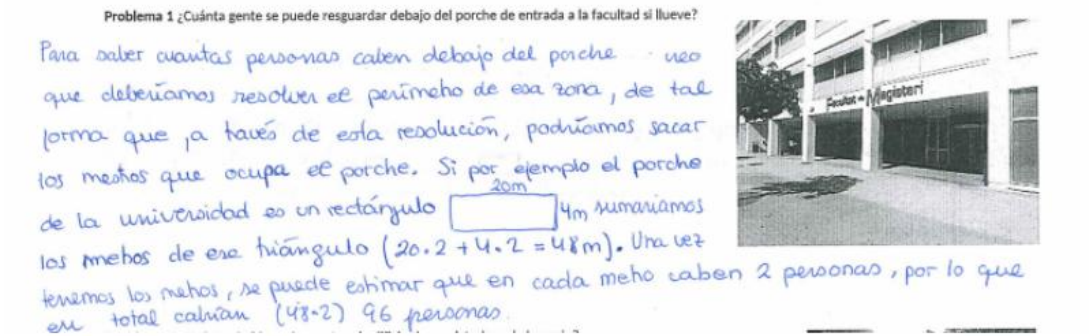
Errores en problemas de Fermi

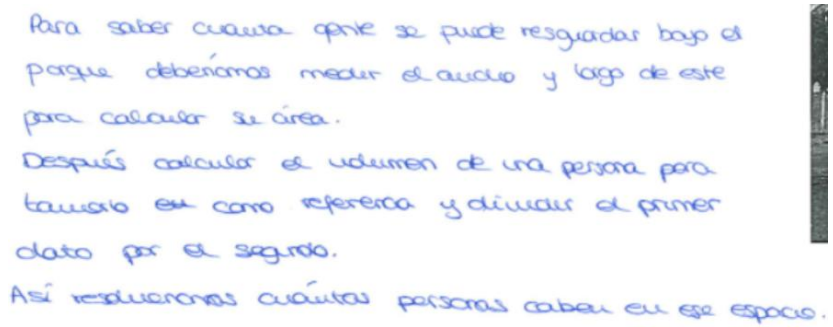
Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

Primary school pre-service teachers

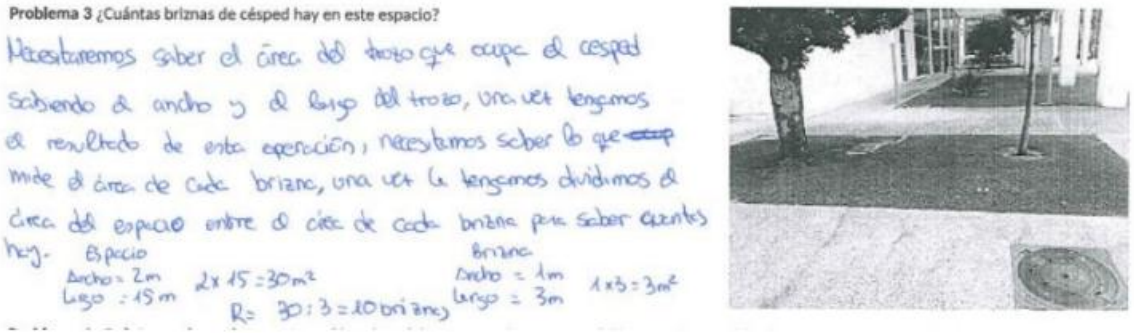
Errors

2. Errores de matematización (39.91%)





E5. Modelo matemático incorrecto por error en términos de la magnitud. P.e. confusión fórmula área y perímetro, frecuente (Dickson et al., 1991). P.e. dividir medidas de magnitudes distintas. Suele ir asociado con *E2.*



E6. Error de matematización por inadecuada imagen mental de la unidad de medida. Error en interiorización de lo que es el metro.

Errores en problemas de Fermi

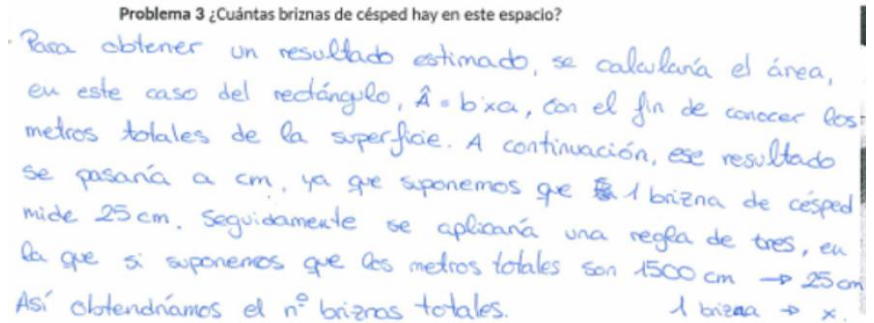
Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

Primary school pre-service teachers

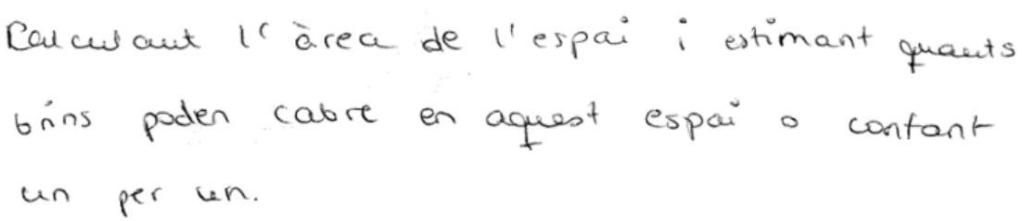
Errors

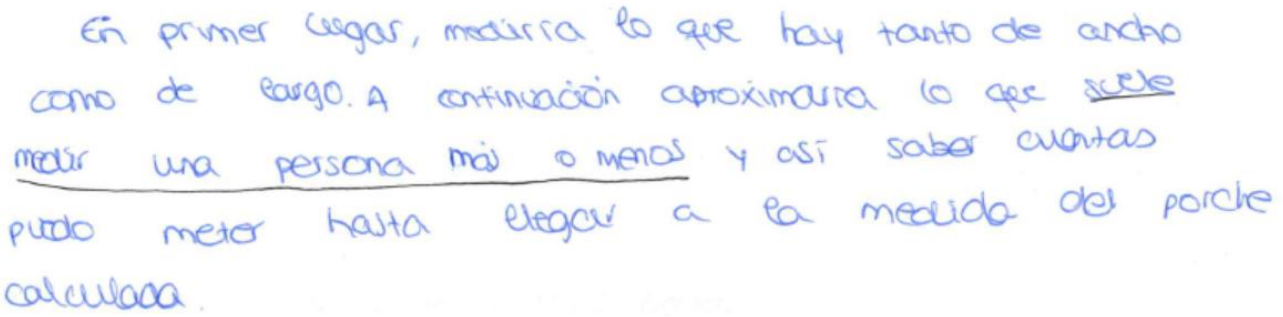
2. Errores de matematización (39.91%)

E7. Error matematización por uso de unidades de medida inadecuadas. P.e. área en metros en lugar de metros cuadrados.


Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Para obtener un resultado estimado, se calculará el área, en este caso del rectángulo, $\hat{A} = b \times a$, con el fin de conocer los metros totales de la superficie. A continuación, ese resultado se pasaría a cm, ya que suponemos que 1 brizna de césped mide 25 cm. Seguidamente se aplicaría una regla de tres, en la que si suponemos que los metros totales son 1500 cm → 25 cm. Así obtendríamos el nº briznas totales. 1 brizna → x.


Calculant l'àrea de l'espai i estimant quants brins poden cabre en aquest espai o contant un per un.


En primer lugar, mediría lo que hay tanto de ancho como de largo. A continuación aproximaría lo que suele medir una persona más o menos y así saber cuantas puedo meter hasta llegar a la medida del porche calculada.

E8. *No hay modelo matemático o está incompleto.* En un primer caso, las estrategias recuento (sin modelo matemático) se consideran este tipo de error. Por modelo matemático incompleto nos referimos a que falta explicitar cómo matematizar/medir alguna variable o la relación entre ellas.

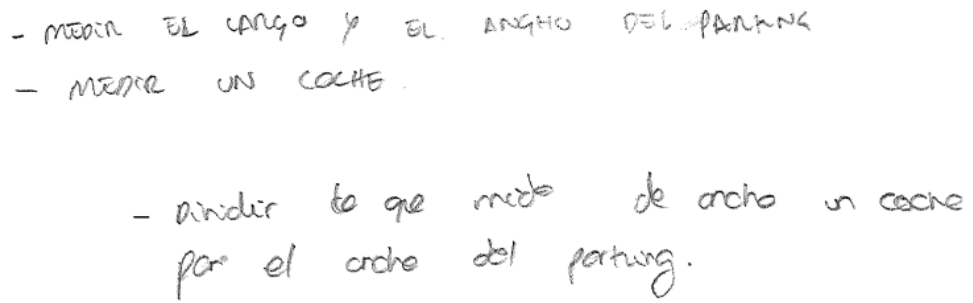
Errores en problemas de Fermi

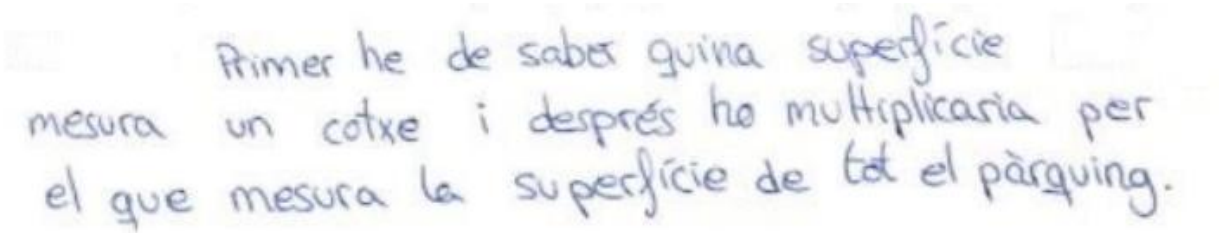
Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

Primary school pre-service teachers

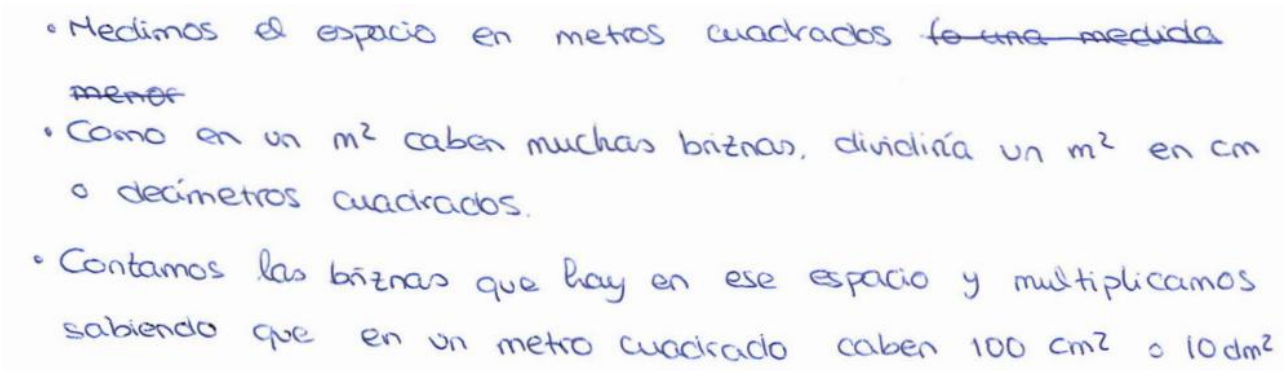
Errors

3. Errores de trabajo matemático (20.3%)

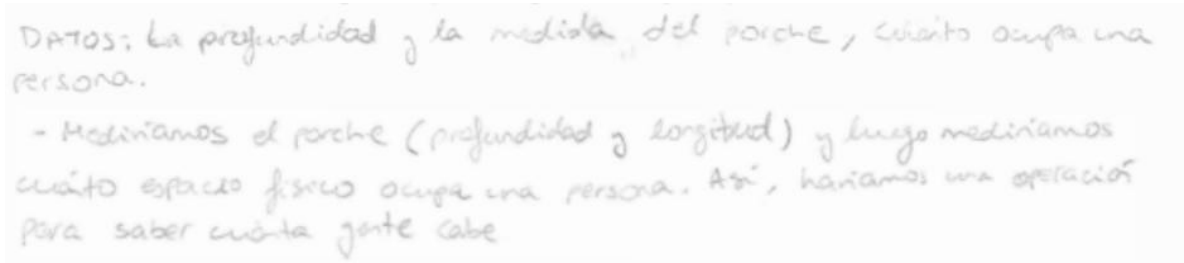




E9. Error procedimientos de cálculo incorrectos. P.e. error de inversión de las variables (reversal error: Gónzalez-Calero et al., 2015). P.e. error de inversión de la operación (Ivars & Fernández, 2016).



E10. Error en la conversión de unidades de medida.



E11. Procedimientos incompletos.

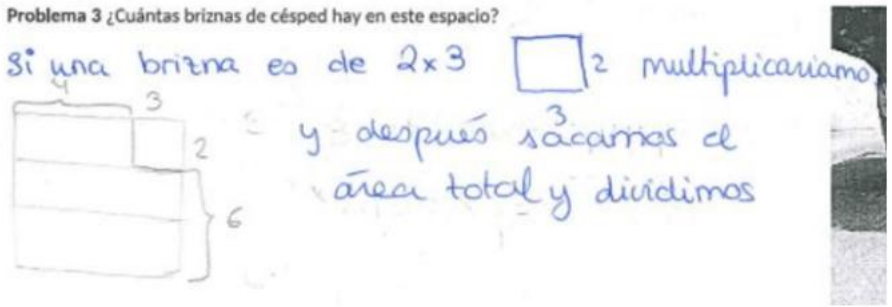
Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

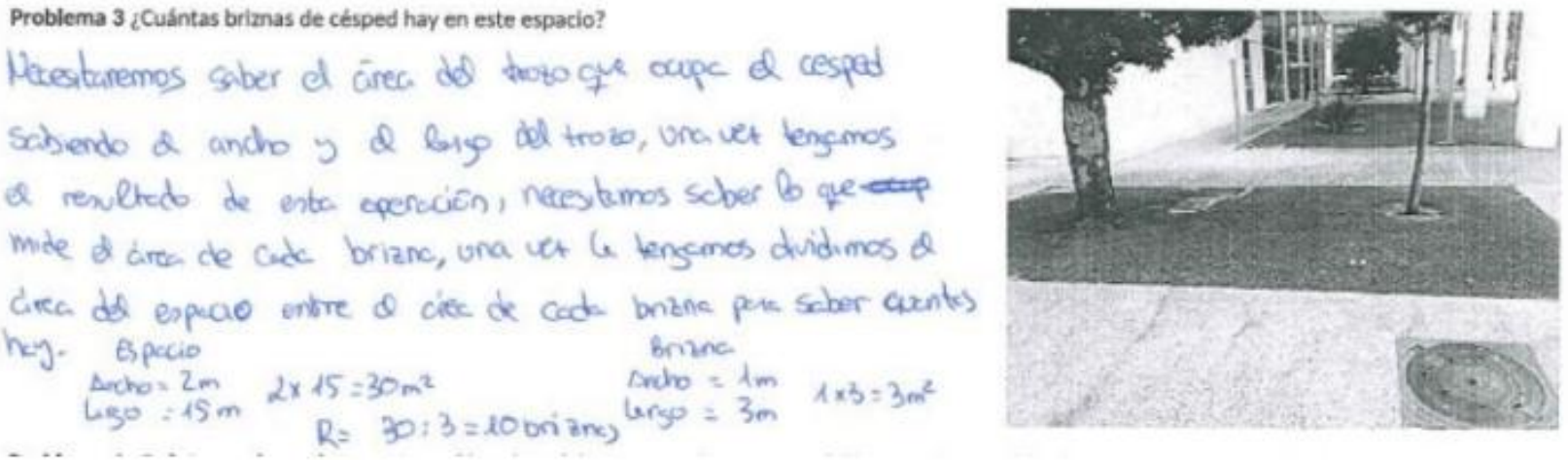
Errors

Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

4. Errores de interpretación (2.39%)



E12. Ausencia de unidades de medida en el resultado.



E13. Estimación claramente incompatible con la situación real. Ligado con E6 (referente).

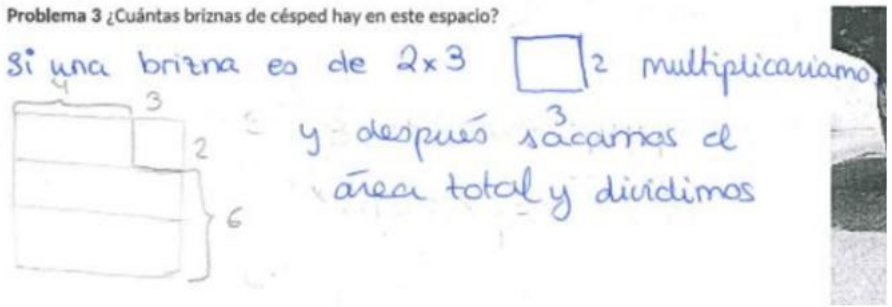
Errores en problemas de Fermi

Resultados. Análisis cualitativo tipos de error

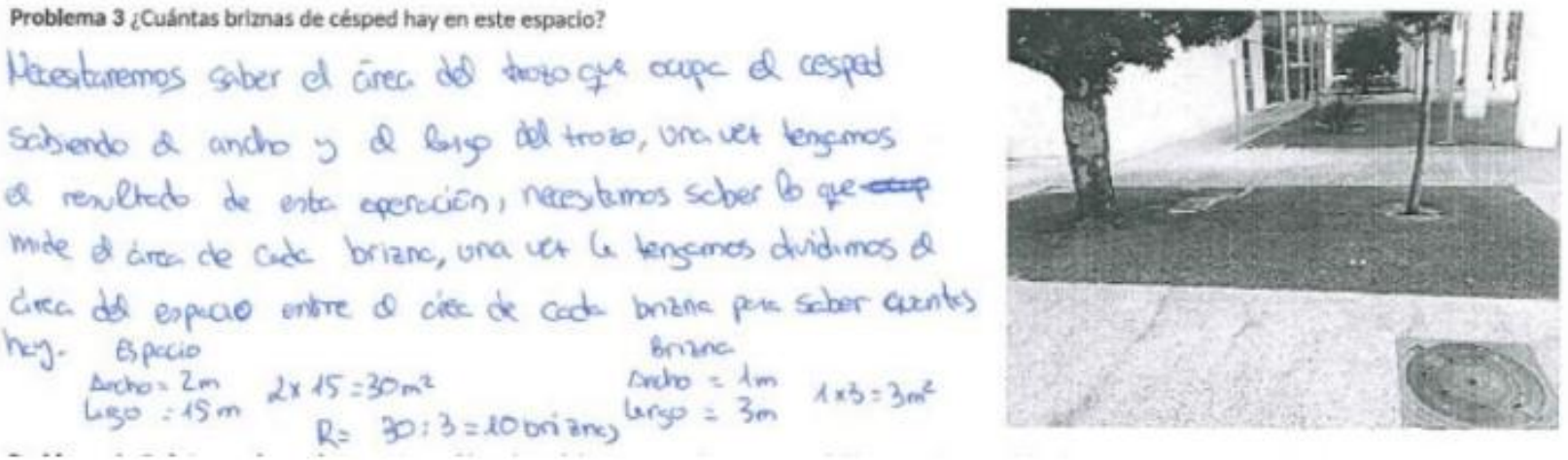
Primary school pre-service teachers

Errors

4. Errores de interpretación (2.39%)



E12. Ausencia de unidades de medida en el resultado.



E13. Estimación claramente incompatible con la situación real. Ligado con E6 (referente).

Errores en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers

Errors

Resultados

- Se detectan errores graves que impiden el desarrollo del modelo.
- También errores conceptuales en sentido de la medida, y procedimientos incorrectos (algoritmo inverso, error de inversión) debidos al uso de lenguaje natural para explicar los cálculos.
- Apenas errores de interpretación por ser planes de resolución.

Relación entre características contextuales y categorías de error

Categoría de error	P1-Personas	P2-Baldosas	P3-Césped	P4-Coches
Errores de simplificación	47	56	53	16
Errores de matematización	55	47	46	36
Errores de trabajo matemático	26	14	27	27
Errores de interpretación	3	3	4	1
Total	131	120	130	80

- Tamaño grande elementos y ordenados (P4) ◎ PF más sencillos.
- Tamaño más pequeño más dificultad de concebir un modelo del espacio y distribución adecuados (P1 y P3).
- Confusión en matematización espacio ocupado por personas y porche (P1).

Relación significativa entre características del contexto y categorías de error $\chi^2 = 23.29$ y LR = 24.12 con $p < 0.01$. Tamaño del efecto débil (V = 0.13).

Discusión relativa al los estudios sobre el análisis de errores…

- Hemos visto los resultados sobre el estudio de los errores en la secuencia de FP, parece que hay cierta relación entre el número/tipo de error y las características del problema…
- Solo nos hemos fijado en la producción escrita, ¿qué ocurre durante la resolución?

- P3. Ampliar el estudio de errores, usando marcos como MAD o herramientas como TaskTimeTraker, determinando en qué momentos del proceso de resolución aparecen.
- P3. Elaborar un test de conocimientos previos para resolver problemas de Fermi, y estudiar si es un predictor útil del rendimiento.

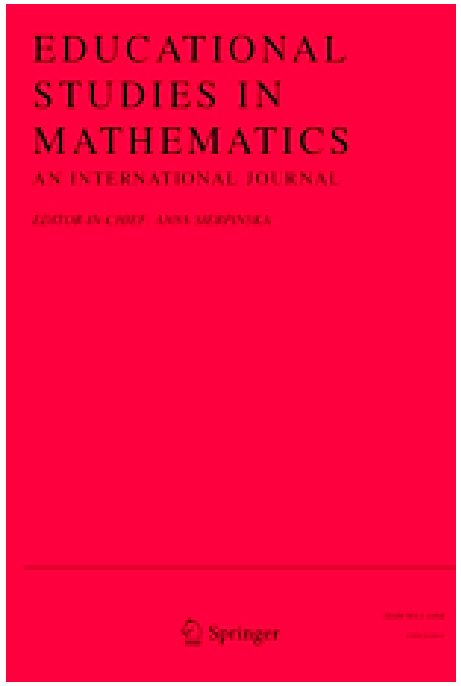
Pla-Castells, M., & García-Fernández, I. (2020). TaskTimeTracker: A tool for temporal analysis of the problem solving process. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*, (1).

Ärlebäck, J. B., & Albarracín, L. (2019, February). An extension of the MAD framework and its possible implication for research. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 4). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Cuarta parte

Rendimiento y flexibilidad en resolución de problemas de Fermi

Rendimiento y flexibilidad en problemas de Fermi



Educational Studies in Mathematics (2023) 113:207–227
https://doi.org/10.1007/s10649-023-10220-5

Check for updates

Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems

Carlos Segura[1] · Irene Ferrando[1]

Accepted: 19 February 2023 / Published online: 23 March 2023
© The Author(s) 2023

Primary school pre-service teachers | Errors | Performance | Strategies (models) | Flexibility

El anterior trabajo sobre errores permite definir con mayor precisión rendimiento en PF.

Además, se enlaza con trabajos anteriores sobre múltiples resoluciones, para introducir la flexibilidad.

Sabemos que los futuros maestros aportan diferentes resoluciones a problemas similares en función de sus características contextuales, luego, utilizando las secuencias de PF nuestros objetivos son:

- Analizar el rendimiento (definiendo niveles).
- Analizar la flexibilidad (definiendo niveles).
- Buscar posibles relaciones entre rendimiento y flexibilidad.
- Ver si hay diferencias en el rendimiento según la flexibilidad.

R y F en problemas de Fermi

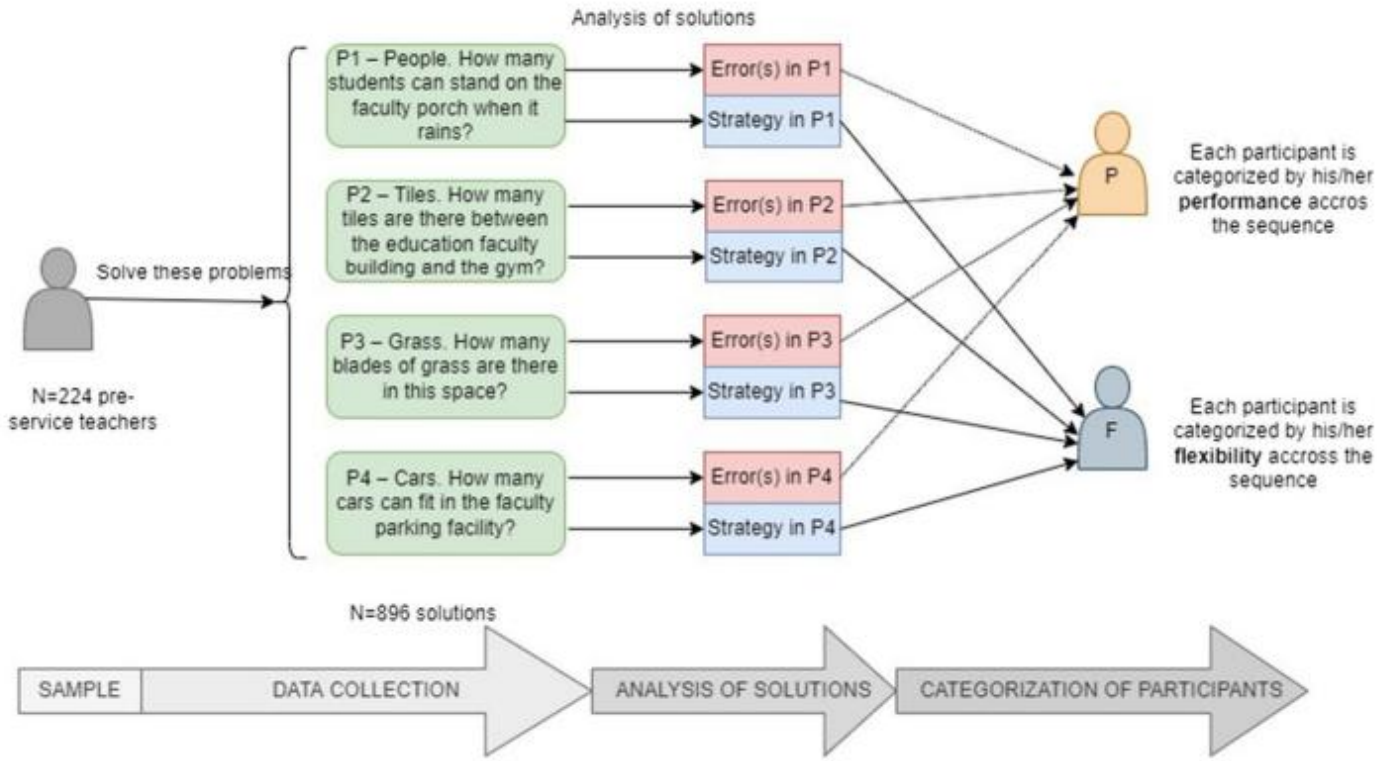


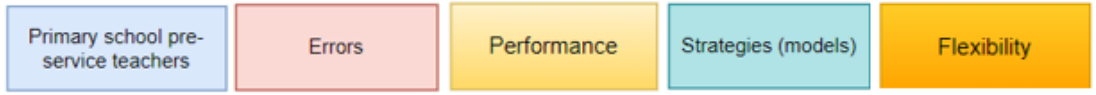
Fig. 1 Description of methodological design of the study

Puesto que los problemas de Fermi son abiertos y no puede validarse si la estimación es correcta o incorrecta, se analiza cada resolución según su coherencia interna (Moreno et al., 2021).

Se distingue entre **errores estratégicos** (aquellos que interrumpen el ciclo de modelización: E1, E4 y E8) y **errores matemáticos** (el resto, asociados a conceptos y procedimientos relacionados con la medida, operaciones o razonamiento proporcional).

Nos interesa conocer la competencia de los futuros maestros al resolver (secuencias) de problemas reales con soluciones múltiples (Guberman & Leikin, 2013; Schukajlow et al., 2015; Szydlik et al., 2003).

Rendimiento en problemas de Fermi



- Schoenfeld (1982) da dos condiciones para tener un rendimiento exitoso en la resolución de un problema matemático: la primera es saber manejar la estrategia adecuada y descartar las que no conducen al éxito; la segunda es conocer las técnicas básicas implicadas en la ejecución de la estrategia.

- En este sentido, Copur-Gencturk y Doleck (2021) analizaron el rendimiento en la resolución de problemas verbales, observando si el resolutor es capaz de idear una estrategia válida y ejecutarla correctamente para obtener la solución.

- Por tanto, hicimos una simplificación del trabajo anterior sobre errores, distinguiendo entre **EE** y **EM**.

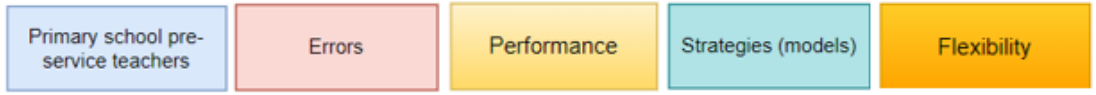
En consecuencia, se pueden distinguir tres **niveles de rendimiento** (variable ordinal) a lo largo de la secuencia de PF:

- El rendimiento es bajo cuando el participante propone al menos una resolución con un error estratégico. Se codifica como 0.

- El rendimiento es básico cuando el participante no comete errores estratégicos pero hay al menos una resolución que contiene un error matemático. Se codifica como 1.

- El rendimiento es alto cuando el participante no comete errores en ninguna resolución. Se codifica como 2.

Flexibilidad en problemas de Fermi



- La **flexibilidad** en el uso de estrategias (resoluciones) se refiere a la capacidad de los individuos para elegir entre diferentes tipos de resolución cuando se enfrentan a una actividad matemática. La flexibilidad se considera una habilidad matemática importante (Heinze et al., 2009).

- En el marco de la resolución de problemas, los estudios sobre el uso flexible de múltiples resoluciones la consideran una parte esencial para construir un conocimiento profundo y conectado (Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Star & Rittle-Johnson, 2008).

- La mayoría de los estudios sobre la influencia del desarrollo de múltiples estrategias de solución y su uso flexible se han centrado en tareas intramatemáticas.

- Pero hay escasos estudios empíricos que relacionen la flexibilidad y el rendimiento en la resolución de problemas en el mundo real (Schukajlow y Krug, 2014; Schukajlow et al., 2015; Achmetli et al., 2019).

Flexibilidad en problemas de Fermi

Algunos ejemplos previos (intramatemáticos)

Star y Rittle-Johnson (2008) definen flexibilidad en resolución de ecuaciones lineales como el conocimiento de: (a) multiples estrategias; (b) ~~la eficiencia relativa (según el tipo de ecuación) de esas estrategias.~~ (**Adaptabilidad**).

Table 1
Example equations solved using two different strategies

Equation type	Solution using standard strategy	Solution using more efficient strategy
$a(x+b)=c$ Divide composite	$3(x+1)=15$ $3x+3=15$ $3x=12$ $x=4$	$3(x+1)=15$ $x+1=5$ $x=4$
$a(x+b)+d(x+b)=c$ Combine composite	$3(x+1)+2(x+1)=20$ $3x+3+2x+2=20$ $5x+5=20$ $5x=15$ $x=3$	$3(x+1)+2(x+1)=20$ $5(x+1)=20$ $x+1=4$ $x=3$
$a(x+b)=d(x+b)+c$ Subtract composite	$7(x-2)=3(x-2)+16$ $7x-14=3x-6+16$ $7x-14=3x+10$ $4x-14=10$ $4x=24$ $x=6$	$7(x-2)=3(x-2)+16$ $4(x-2)=16$ $x-2=4$ $x=6$

Flexibilidad en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers | Errors | Performance | Strategies (models) | Flexibility

Algunos ejemplos previos (intramatemáticos)

Elia, van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou (2009) exploran la flexibilidad en la resolución de problemas (intramatemáticos) no rutinarios con múltiples resoluciones (heurísticos).

Table 2 Students' strategy distribution for each problem

Strategy	Age problem		Coins problem		Quiz problem	
	f^a ($n = 152$)	%	f ($n = 152$)	%	f ($n = 152$)	%
Repeat	7	5	4	3	15	10
Trial-and-error	12	8	24	16	10	7
Extreme	2	1	7	5	10	7
Systematic listing	22	15	5	3	16	11
Proof-or-check	22	15	36	24	49	32
Halving coins/value	–	–	4	3	–	–

[a] Students could use more than one strategy (see Sects. 5.2.2 and 5.2.4)

Table 3 Distribution of students' inter-task strategy flexibility scores

Score of changes in strategy use over the three problem pairs	f ($n = 152$)	%
Non-applicable	90[a]	59
0	11	7
1	27	18
2	12	8
3	12	8

[a] These students did not exhibit strategy use in more than one problem

Table 5 Students' mean performance and standard deviation in problem solving per inter-task strategy flexibility score

Score of inter-task strategy flexibility	$\bar{x}$	SD	n
0	0.64	0.67	11
1	1.15	0.79	27
2	1.58	0.67	12
3	1.58	1.00	12

Cambio de estrategias entre diferentes problemas → **flexibilidad inter-tarea**.

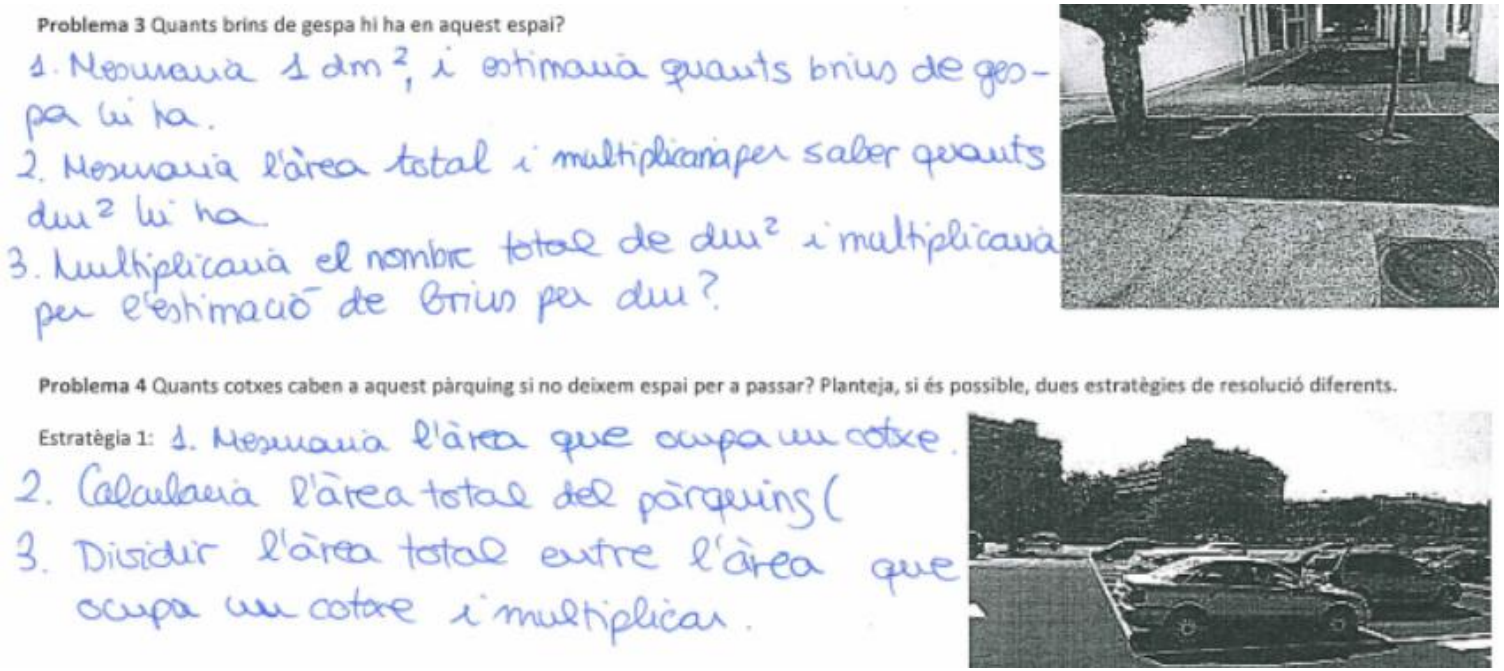
Cambio de estrategias dentro de un problema → flexibilidad intra-tarea.

Encuentran que la flexibilidad inter-tarea (en una secuencia) se relaciona con mejor rendimiento en la resolución de problemas. La flexibilidad intra-tarea no relaciona con mejor rendimiento.

Flexibilidad en problemas de Fermi

Definición y categorización de niveles de flexibilidad en resolución de PF

Siguiendo la definición de Elia et al. (2009) de flexibilidad inter-tarea, por ser adecuada para el uso de secuencias de problemas, en nuestro trabajo consideramos que un resolutor muestra **flexibilidad a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi** cuando cambia de tipo resolución al menos en uno de ellos.



Esta futura maestra utiliza en *P3- Césped* una resolución basada en Densidad,

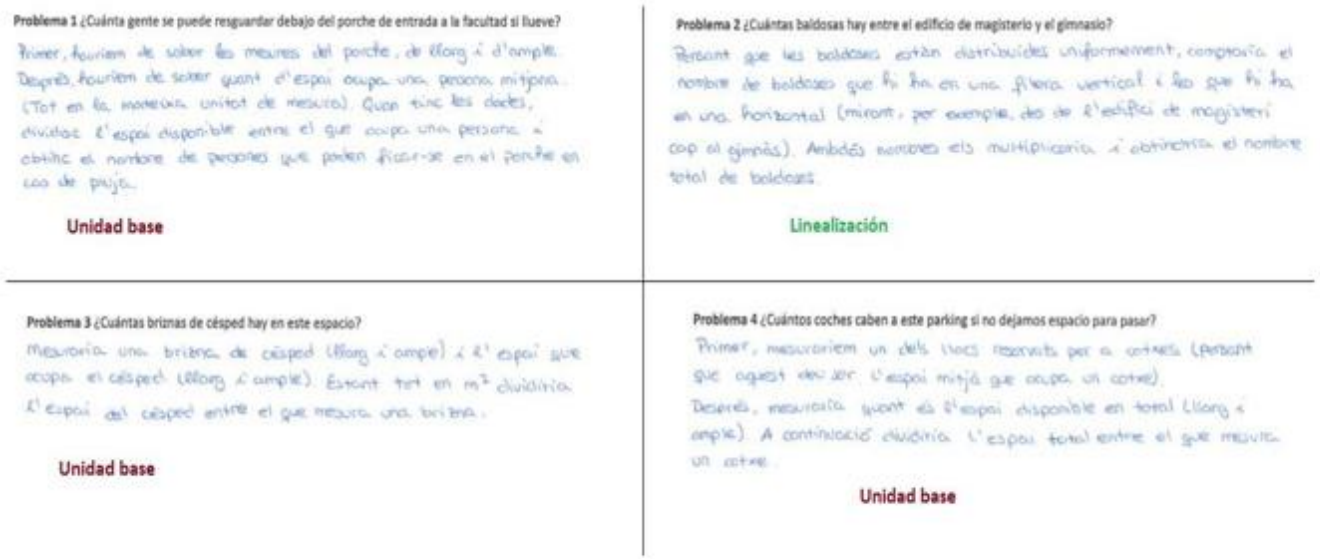
y **cambia**

en *P4- Coches* a una resolución basada en Unidad Base.

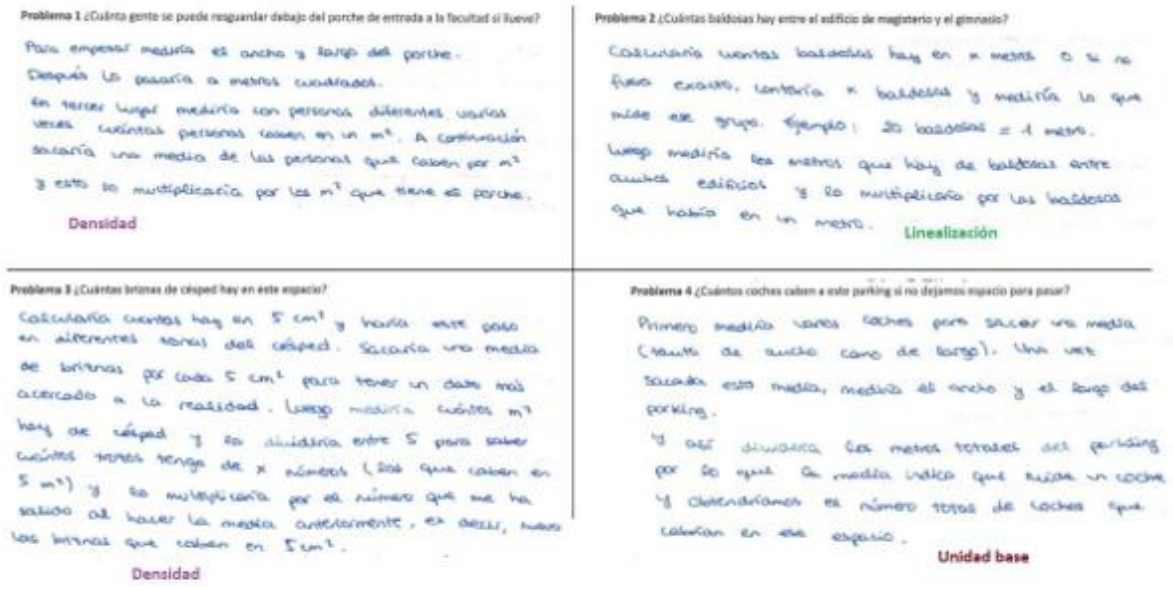
Flexibilidad en problemas de Fermi

Definición y categorización de niveles de flexibilidad en resolución de PF

Se puede codificar el número de cambios de estrategia a lo largo de la secuencia. Incompleta = 1, Recuento = 10, Linealización = 100, Unidad base = 1000, Densidad = 10000. Sumando se obtiene un resultado que permite codificar los cambios de tipo de resolución durante la secuencia 1 en un número de, cómo máximo, cinco cifras.



3100



21100

Flexibilidad en problemas de Fermi

Definición y categorización de niveles de flexibilidad en resolución de PF

	P1:people					P2: tiles					P3: grass					P4: cars					
	I	C	L	U	D	I	C	L	U	D	I	C	L	U	D	I	C	L	U	D	
E1				1000				100			1								1000		2101
E2					10000			100							10000				1000		21100
E3			100					100						1000					1000		2200
E4		10							1000		1							100			1111
T		10	100	1000	10000			300	1000		2			1000	10000			100	3000		

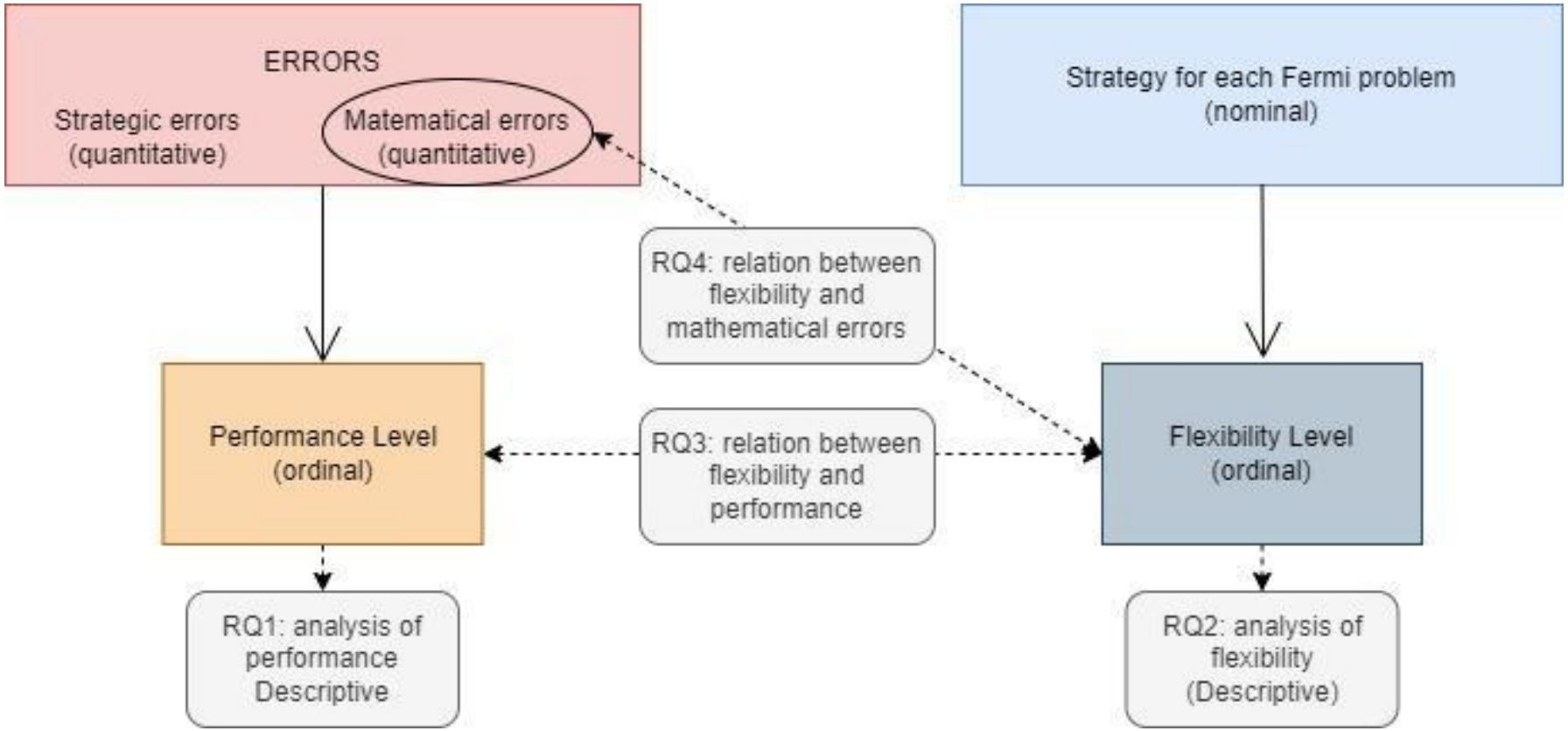
Esto permite definir la variable ordinal **niveles de flexibilidad**:

- Nada flexible: mismo tipo de resolución en todos los problemas de Fermi de la secuencia.
- Moderadamente flexible: usa dos tipos de resolución, pero cambia sólo en un problema de la secuencia.
- Muy flexible: usa dos o más tipos de resolución y cambia en dos o más problemas de la secuencia.

Flexibilidad en problemas de Fermi

Primary school pre-service teachers | Errors | Performance | Strategies (models) | Flexibility

Descripción de las variables y preguntas de investigación



Flexibilidad en problemas de Fermi

Resultados: EE y EM en la secuencia de PF

Table 3 Distribution of strategic and mathematical errors by problem

Problem	Strategic errors		Mathematical errors	
	Identification of variables	Relation between variables	Measurement procedures	Calculation procedures
P1-People	13	27	62	29
P2-Tiles	8	21	74	17
P3-Grass	36	22	44	28
P4-Cars	11	17	24	28
TOTAL	68 + 87 = 155		204 + 102 = 306	

En la tabla vemos una simplificación del anterior sistema de errores de PF para definir operativamente los niveles de rendimiento (bajo, básico y alto) en PF.

Los 155 errores estratégicos corresponden con el 33% del total que interrumpen el ciclo de modelización. Un 44% de estos errores se deben a no identificar todas las variables, y un 56% a que falta definir relaciones entre ellas.

De los errores matemáticos, 204 (2/3) se relacionan con el sentido de la medida y la estimación de magnitudes espaciales, y 102 (1/3) con procedimientos de cálculo.

Flexibilidad en problemas de Fermi

Resultados: relación entre (niveles de) flexibilidad y (niveles de) rendimiento

Table 4 Distribution of the $N = 224$ pre-service teachers according to flexibility and performance levels of their solutions

Performance Level	Flexibility Level		
	Non-flexible	Moderately flexible	Very flexible
Level 0. Low	45 (65%)	42 (47%)	3 (5%)
Level 1. Basic	15 (22%)	31 (35%)	31 (47%)
Level 2. High	9 (13%)	16 (18%)	32 (48%)

90 cometen EE.
77 no cometen EE pero sí EM.
57 no cometen errores.

69 NF | 89 PF | 66 MF

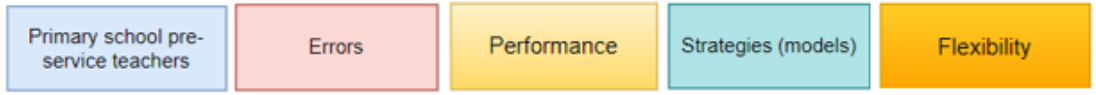
69% de los futuros maestros son flexibles resolviendo una secuencia de PF.

La relación entre la flexibilidad y el rendimiento es significativa ($\chi^2 = 58.86$, $p < 0.001$). El coeficiente de correlación de Spearman ($r(222) = 0.47$, $p < 0.001$) indica que existe la correlación es positiva y con un efecto mediano casi fuerte.

Los residuos estandarizados corregidos ($|.| > 1.96$) indican qué casillas son significativas:

- La frecuencia de resolutores muy flexibles con bajo rendimiento es mucho menor (-4.57) y de muy flexibles con alto rendimiento mucho mayor (+3.71).
- Al contrario, la frecuencia de resolutores no flexibles con bajo rendimiento es mucho mayor (+3.28) y de no flexibles con alto rendimiento mucho menor (-2.04).

Flexibilidad en problemas de Fermi



- **RQ1.** 90 futuros maestros (40%) tiene rendimiento bajo, es decir, es incapaz de desarrollar un modelo/estrategia para alguno de los problemas de secuencia de PF. El 60% restante es capaz de desarrollar una resolución completa para todos los problemas de Fermi, pero más de la mitad tienen rendimiento básico, es decir, cometen errores matemáticos relacionados con medida o procedimientos de cálculo.

- **RQ2.** Las secuencias de PF diseñadas por contraste entre variables contextuales promueven la flexibilidad en el uso de varias estrategias, ya que el 69% de los futuros maestros demuestran flexibilidad (moderada o alta).

- **RQ 3.** Hay una relación significativa entre alta flexibilidad y alto rendimiento; del mismo modo, también entre falta de flexibilidad y bajo rendimiento. Sin embargo, la relación entre flexibilidad moderada y rendimiento no es significativa. Esto podría deberse a que los resolutores que cambian sólo una vez de tipo de resolución lo hagan porque no sean capaces de resolver el problema de la secuencia pero no dominen la nueva estrategia o modelo, y que los que son muy flexibles y cambian varias veces con fluidez lo hagan porque las dominan y escogen la que mejor se adapta.

- En todo caso, era esperable que si un resolutor es muy flexible (conoce y usa varios tipos de resolución) pueda evitar errores estratégicos (rendimiento bajo).

*¿Pero sigue siendo ventajosa la flexibilidad entre aquellos que sí son capaces de desarrollar estrategias (**RQ4**)?*

Flexibilidad en problemas de Fermi

Resultados: Diferencias en el número de errores matemáticos según el nivel de flexibilidad

Table 5 Distribution of errors made by participants depending on their performance and flexibility levels ($N=461$)

		Non-flexible	Moderately flexible	Very flexible
Level 0. Low	Strategic errors	91	61	3
	Mathematical errors	83	67	6
Level 1. Basic	Mathematical errors	35	69	46

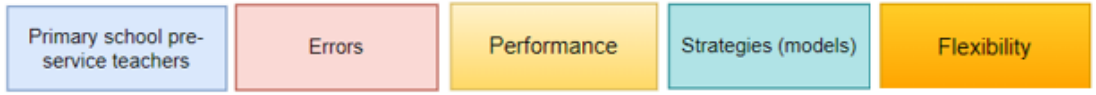
Para responder RQ4 nos centramos en los 134 futuros maestros (24 NF, 47 PF y 63 MF) que son capaces de desarrollar estrategias para todos los problemas, con o sin errores matemáticos (nivel básico o alto).

- Comparamos medias de número de errores matemáticos entre los tres grupos (NF = 1.46, PF = 1.47 y MF = 0.73), por la distribución anormal de los EM usamos una prueba no paramétrica, la H de Kruskal-Wallis, encontrando que las diferencias son significativas ($H = 6.61$, $p < 0.05$). La prueba post hoc de Dunn indica que la diferencia es significativa entre los MF y NF ($p < 0.05$) y entre los MF y PF ($p < 0.05$).

- **RQ4.** Por tanto, entre los resolutores capaces de desarrollar estrategias, ser muy flexible sigue siendo ventajoso (para no cometer errores de medida o procedimentales).

- Sin embargo, entre los 90 resolutores con nivel bajo no hay diferencias al cometer errores matemáticos (H = 0.58 y p=0.75). En bajo nivel de desarrollo estratégico la flexibilidad no es ventajosa.

Flexibilidad en problemas de Fermi



Conclusiones y limitaciones

- Dado que los estudios centrados en el uso de múltiples estrategias de resolución para problemas de contexto real y de modelización son escasos, este trabajo aporta un enfoque novedoso, utilizando secuencias de problemas de Fermi para estudiar la flexibilidad.

- La flexibilidad es uno de los criterios para evaluar la creatividad (Levav-Waynberg & Leikin, 2012), y recientemente Lu y Kaiser (2022) han enriquecido las competencias de modelización incluyendo la creatividad. Flexibilidad en modelización es una línea de estudio prometedora.

- Se trata de un estudio correlacional, por lo que no podemos determinar dependencias entre variables. Es necesario profundizar en esta investigación diseñando otros estudios que nos ayuden a determinar si una flexibilidad influye en el rendimiento o si es el rendimiento el que influye en la flexibilidad.

- Falta interpretar por qué los resolutores cambian de tipo de resolución: ¿es arbitrario? ¿se adaptan al problema? ¿hay resoluciones mejores según las características contextuales de los problemas? Un paso más es el estudio de la adaptabilidad.

Discusión abierta sobre flexibilidad y rendimiento…

Hemos visto la relación entre flexibilidad a lo largo de una secuencia (entre problemas) y rendimiento. La relación es positiva para los muy flexibles, tanto a nivel estratégico (esperable) como procedimental (no tan esperable)….

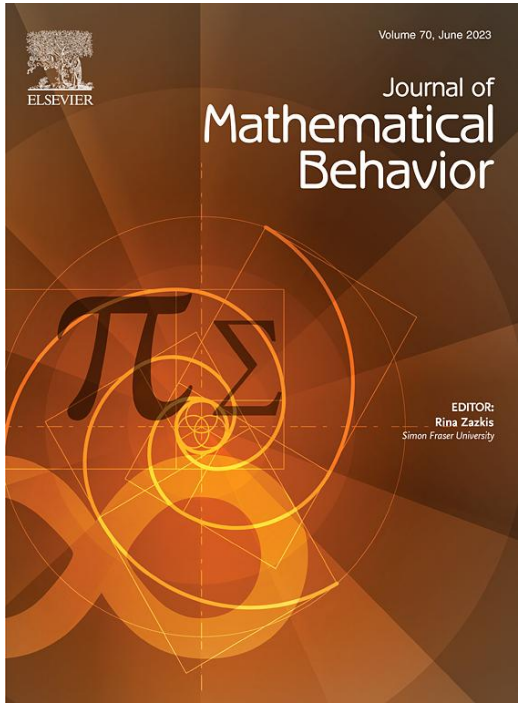
- P4. Falta estudio sobre flexibilidad intra-tarea. Rediseñar la secuencia para estudiar relaciones entre flexibilidad intra-tarea e inter-tarea, y relaciones entre flexibilidad intra-tarea y rendimiento.
- P4. Falta diseñar estudios experimentales que permitan obtener relaciones causales flexibilidad/adaptabilidad – rendimiento. Método elección/no elección (Siegler & Lemaire, 1997).
- P4. Ampliar el estudio de la flexibilidad a estudiantes de todos los niveles educativos.
- P4. Ampliar el estudio de la flexibilidad en problemas de Fermi a la creatividad en problemas de Fermi.
- P4. Ampliar el estudio de la flexibilidad a otro tipo de problemas de Fermi y otros problemas de modelización.

Quinta parte

Adaptabilidad en la resolución de problemas de Fermi

Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity



Primera aproximación a la adaptabilidad: el objetivo es estudiar si los futuros maestros, cuando pasan del plan de resolución individual a su ejecución realizando mediciones y experimentando en el lugar auténtico de los problemas, se adaptan a dificultades o características no previstas (*adaptive expertise*).

También queremos analizar cómo consensuan, a partir de los planes de resolución individuales, la resolución grupal.

Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers

C. Segura [a,1], I. Ferrando [a,2], L. Albarracín [b,*,3]

[a] *Universitat de Valencia, Spain*
[b] *Universitat Autònoma de Barcelona, Spain*

Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Los resolutores demuestran pericia adaptativa (*adaptive expertise*) cuando son capaces de utilizar modelos/estrategias de resolución nuevas y más eficaces para problemas que ya se les han planteado (Hatano & Inagaki, 1986).

Experiencia

- Primera experiencia (trabajos anteriores): 224 futuros maestros desarrollan planes de resolución para la secuencia P1-P2-P3-P4 de problemas de Fermi.

- Segunda experiencia: los 224 forman N = 62 grupos que deben implementar una resolución, realizando medidas y experimentando en el lugar real de los problemas de la secuencia, para alcanzar una estimación numérica.



Contexto real evocado frente a contexto real experimentado, matematizando el entorno (*Math trail:* Buchholtz, 2017).

Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?



Datos y medidas recogidos:



Persona 50×40

Proceso de resolución:

Área total : 24'64 × 4'77 = 117'53 m²

Puertas: r = 1'16 A = π·r² = 4'23m² → media

Bancos (×2) - 0'5×0'9 = 0'45 m² 0'9 m² (bancos)

Pilares grandes (×2) = 0'6 × 0'84 = 0'5m² 1 m² (2 pilares)

Pilar pequeño = 0'63 × 0'6 = 0'38 m²

Obstáculos = 4'23 + 0'9 + 1 + 0'38 = 6'51 m²

Resultado: Área sin obstáculos 117'53 - 6'51 = 111'02 m²

Hemos calculado, por un lado, el área total del espacio. Por otro lado, hemos calculado el área de los espacios donde no caben personas. Y este último lo hemos restado al área total.

Área persona media 0'5×0'4 = 0'2 m²

Personas que caben = 111'02 / 0'2 = 555'1 ≃ 555 personas

Hemos calculado el área media de la persona y para calcular cuantas personas caben en este espacio, hemos dividido el área entre el espacio que ocupa una persona.

Resolución grupal que implementa los planes consensuados.

Segura et al. (2021):

Se enriquece el modelo para ganar *precisión*: incluyen elementos de complejidad (*realistic assumptions*): obstáculos (pilares del porche, papeleras, puertas giratorias=, media de distintos tamaños.

Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Table 2
Relationships between problems and types of solution in 224 individual proposals and 62 group proposals, indicating the absolute frequency and, in brackets, the relative frequency in percentage terms for each problem in each phase of the activity.

	Incomplete	Counting	Linearization	Base unit	Density
P1-I	34 (15.2%)	1 (0.4%)	28 (12.5%)	**110 (49.1%)**	51 (22.8%)
P1-CE	0 (0%)	0 (0%)	1 (1.6%)	14 (22.6%)	**47 (75.8%)**
P2-I	34 (15.2%)	6 (2.7%)	**92 (41.1%)**	71 (31.7%)	21 (9.3%)
P2-CE	1 (1.6%)	0 (0%)	7 (11.3%)	**49 (79%)**	5 (8.1%)
P3-I	44 (19.6%)	2 (0.9%)	15 (6.7%)	67 (29.9%)	**96 (42.9%)**
P3-CE	3 (4.8%)	0 (0%)	2 (3.2%)	20 (32.3%)	**37 (59.7%)**
P4-I	28 (12.5%)	4 (1.8%)	31 (13.9%)	**160 (71.4%)**	1 (0.4%)
P4-CE	0 (%)	0 (0%)	4 (6.4%)	**58 (93.6%)**	0 (0%)

Los futuros maestros cuando trabajan in situ adaptan sus resoluciones a características del contexto que no habían sido evocadas:

- Desaparece Recuento al experimentar que es un tipo de resolución erróneo en este contexto, inaplicable.
- En *P1-Personas* desciende (con $z = 4.8$ y $p < 0.0001$) proporción Unidad Base y aumenta Densidad porque hay partición de grandes baldosas en el porche.
- En *P2- Adoquines* desciende (con $z = 5.1$ y $p < 0.0001$) proporción de Linealización porque se adaptan a que hay partes de desorden en la distribución de las baldosas pequeñas.

Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

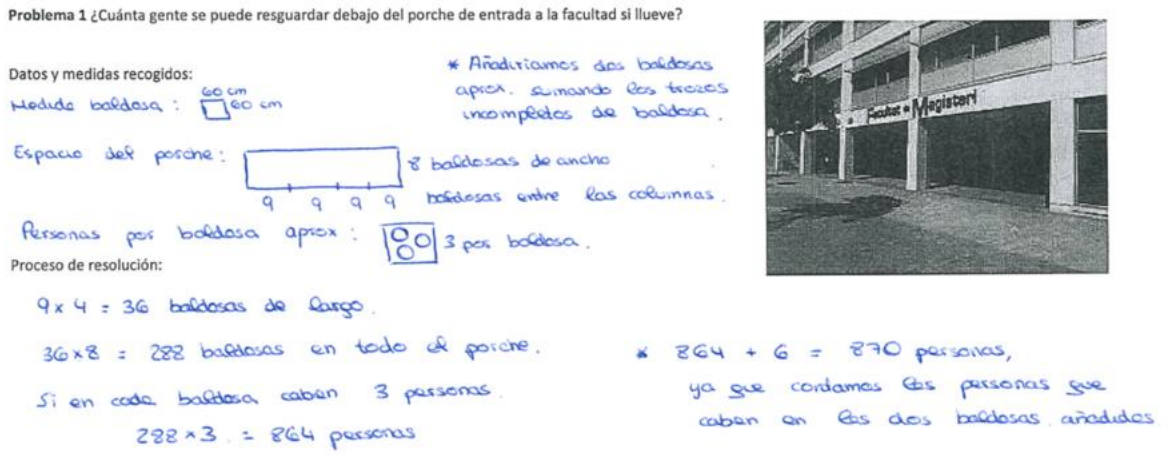
Adaptación para *P2* del plan de resolución individual a resolución in situ para recoger características no evocadas (irregularidad de la distribución de adoquines):





Fig. 4. Detail of the paving at the scene of the *P2-Tiles* problem, with irregularities in the tile distribution.

Resolución para *P1* que desarrolla un modelo basado en densidad, aprovechando grandes baldosas del suelo que no habían sido evocadas en los planes individuales.



Adaptabilidad en trabajo grupal e in situ

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Tipos de acuerdo grupal (Stasson et al., 1991):

Table 3
Possible scenarios when sharing individual solutions among group members and choosing a group solution, for 62 groups.

	Total Change	Minority to majority	Half and half	Majority to minority	Full consensus
P1-People	**21 (34%)**	10 (16%)	7 (11%)	18 (29%)	6 (10%)
P2-Tiles	**19 (31%)**	18 (29%)	3 (5%)	15 (24%)	7 (11%)
P3-Grass	4 (6%)	16 (26%)	9 (15%)	**26 (42%)**	7(11%)
P4-Cars	1 (2%)	8 (13%)	6 (10%)	**23 (37%)**	**24 (39%)**
TOTAL	45(18%)	52(21%)	25(10%)	**82(33%)**	44(18%)

- Cuando hay cambios entre las características contextuales evocadas y las características contextuales experimentadas in situ que favorecen cambiar de tipo de resolución (adaptive expertise), como ocurre en *P1* y *P2*, la mayoría de los grupos cambian su resolución grupal respecto a las individuales.

- Cuando no hay cambios entre las características contextuales evocadas y las experimentadas in situ (*P3* y *P4*), la resolución grupal se hace por consenso total o implementando el plan de resolución mayoritario en el grupo.

Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity



CERME 13

13TH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

Relationship between strategies and appropriateness criteria for modelling problems involving estimates. An exploratory study with expert mathematics teachers

Carlos Segura[1] and Irene Ferrando[1]

[1]Universitat de València, Spain; carlos.segura@uv.es, irene.ferrando@uv.es

El objetivo es obtener una definición operativa de la adaptabilidad en problemas de Fermi y ofrecer una caracterización que permita interpretar los cambios de tipo de resolución a lo largo de la secuencia.

Se diseña una encuesta dirigida a expertos en educación matemática; el análisis de sus respuestas permite confirmar –desde la perspectiva del experto– la vinculación las características contextuales de los problemas con tipp, y, más importante, éstas con criterios de adecuación **(precisión, rapidez y rigor).**

Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

- Lemaire y Siegler (1995) distinguen cuatro dimensiones de la competencia estratégica: (1) el repertorio de estrategias conocido; (2) la frecuencia con la que se utiliza cada estrategia; (3) la eficacia con la que se ejecuta cada estrategia, medida en términos de rapidez o precisión; (4) la adaptabilidad de la estrategia elegida.

- Adaptabilidad: selección consciente o inconsciente la resolución más adecuada para un problema matemático dado en un contexto determinado (Heinze et al., 2009; Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009).

- Determinar qué se entiende por la estrategia más adecuada o eficaz para un tipo de problema dado es un reto teórico (Heinze et al., 2009). Criterios en la literatura (estudios en aritmética o ecuaciones):

  - Rapidez.
  - Precisión.

Solution using standard strategy	Solution using more efficient strategy
$3(x+1)=15$	$3(x+1)=15$
$3x+3=15$	$x+1=5$
$3x=12$	$x=4$
$x=4$	

35 x 12 = 70 x 6 = 420.

VS

35 x 12 = 10 + 60 + 50 + 300 = 420.

En las decisiones tomadas en el Espacio de Soluciones de Albarracín et al. (2021) se deduce otro criterio, específico para **problemas reales**, relacionado con apoyar el proceso en medidas, resultados empíricos o *realistic assumptions*: lo llamaremos **Rigor**.

Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Llevar estos criterios a la resolución de problemas reales es complejo, pero conocemos y controlamos bien las posibles resoluciones para los PF-2D, y su relación con variables contextuales. ¿Cómo escoger la más rápida, o la más precisa o la más rigurosa?

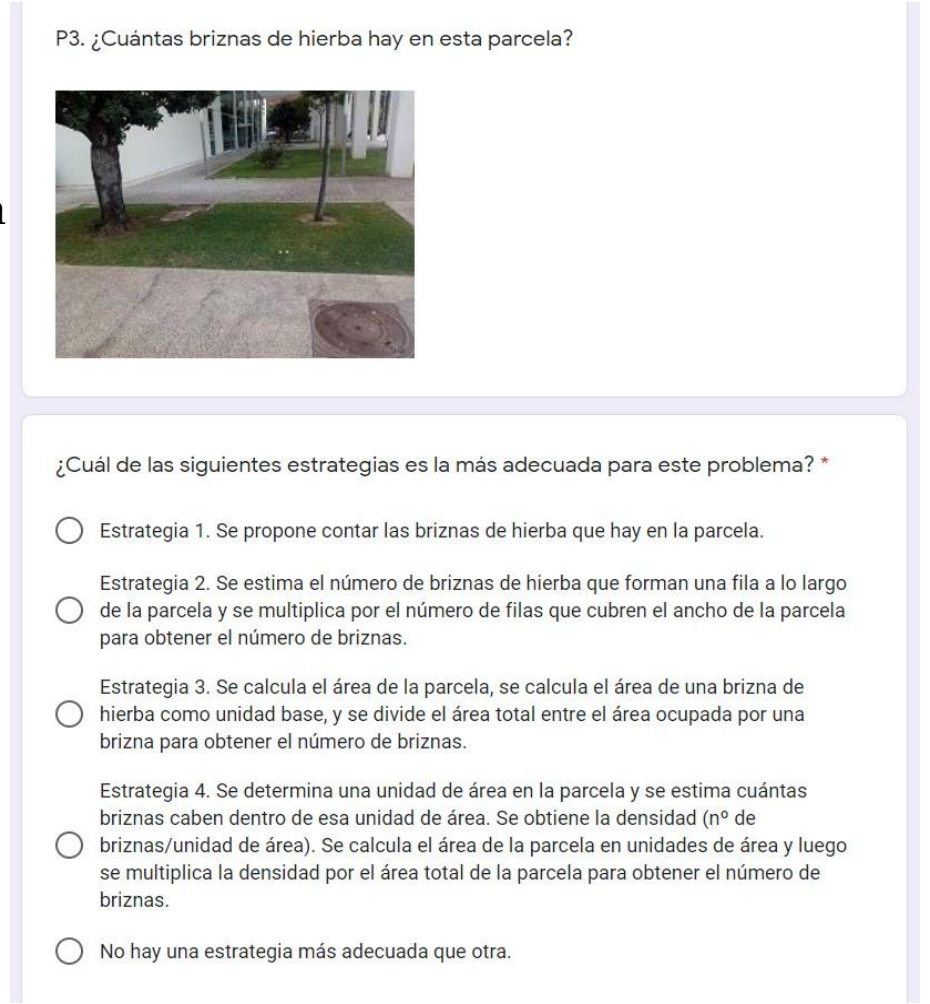
Diseño cuestionario para expertos

- El cuestionario se divide en cuatro secciones; cada sección dedicada a un problema de la secuencia (P1-P2-P3-P4).Cada enunciado del problema acompañado de la imagen.

- Al enunciado del problema le siguen dos preguntas relacionadas con las estrategias para resolverlo:

    - "¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema?" [Respuestas: Descripción cerrada de los tipos de resolución para problema]

    - "¿En cuál de los siguientes criterios se basó para elegir la estrategia más adecuada?" [Respuestas: Rapidez, Precisión, Rigor, Otra].



Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Participantes

- N = 81 expertos en educación matemática (57% hombres; expertos en el contexto de España).

- Entre abril y mayo de 2020, se envió una invitación a participar en un cuestionario online a través de diferentes canales para asegurar un conocimiento sólido de los participantes:
  - lista de correo de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática);
  - lista de correo de la comisión de educación de la RSME (Real Sociedad Matemática Española);
  - lista de correo de profesores de secundaria que habían participado en cursos de formación en modelización matemática (familiarizados con los problemas de Fermi).

- Mayoría (64%) son licenciados en Matemáticas, el 32,1% de ellos son doctores en Matemáticas y el 12,3% son doctores en Educación Matemática.

- Mayoría (51,9%) imparten asignaturas de matemáticas en Educación Secundaria. El 32,1% imparte asignaturas de matemáticas y/o didáctica de las matemáticas en Grados de Maestro/a en Educación Primaria o en el Máster de Educación Secundaria. El 21% imparte asignaturas de matemáticas en titulaciones de Matemáticas, Física o Ingeniería.

Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Resultados

a) Relación contexto-tipo de resolución y relación tipo de resolución – criterio de adecuación

Relación entre la estrategia elegida como más adecuada y el problema de la secuencia, en las respuestas de N = 81 expertos

	Recuento	Linealización	Unidad base	Densidad	No hay más apropiada
P1	1 (1%)	3 (4%)	**35 (43%)**	**34 (42%)**	8 (10%)
P2	2 (2%)	**20 (25%)**	**40 (49%)**	15 (19%)	4 (5%)
P3	0 (0%)	2 (2%)	9 (11%)	**67 (83%)**	3 (4%)
P4	2 (2%)	**26 (32%)**	**30 (37%)**	19 (24%)	4 (5%)
Total	5 (1%)	51 (16%)	114 (35%)	135 (42%)	19 (6%)

	Recuento	Linealización	Unidad base	Densidad	No hay más apropiada
Precisión	5	**29**	**44**	**78**	4
Rapidez	0	8	**78**	34	4
Rigor	1	**35**	17	**72**	1
Otro (sin criterio)	0	0	0	2	11

$\chi^2 = 108.88$ y $LR = 142.86$ con $p < .001$. Tamaño de efecto medio ($V = 0.34$).

La elección de expertos del tipo de resolución más adecuada para cada problema confirma la relación significativa entre resolución y contexto ya encontrada en los futuros maestros.

Correlación entre estrategias y criterios de adecuación es significativa ($\chi^2 = 276.53$ y $LR = 153.74$ con $p < .001$) y fuerte ($V = 0.47$
Expertos escogen precisión como criterio general para los PF. Pero, además, vinculan rapidez con Unidad Base; rigor con Densidad y con Linealización.

Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

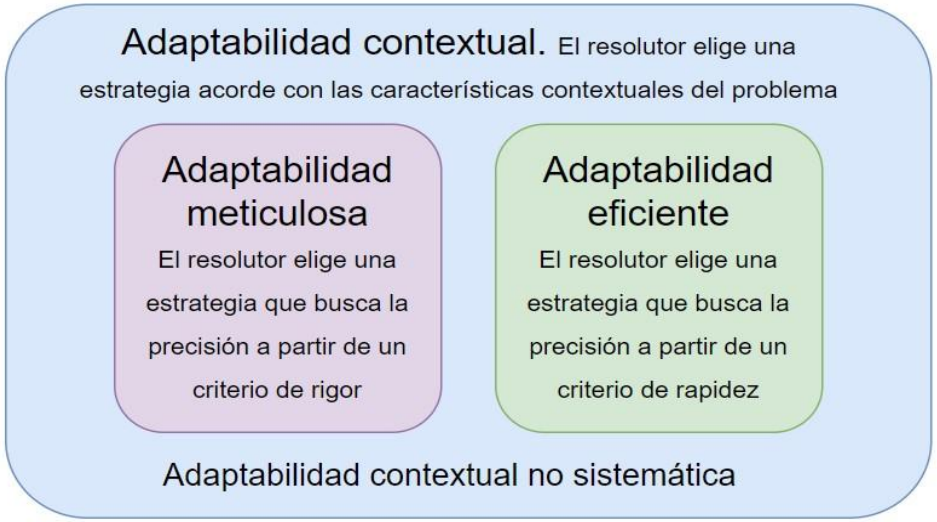
Resultados

b) Caracterización de adaptabilidad contextual para la secuencia de PF

Puesto que la estimación de los PF de la secuencia no se puede validar, se considera que la precisión es una aspiración que no puede confirmarse. Siguiendo la distintición de Hickendorff (2022), la precisión es un criterio potencial, mientras que la rapidez y el rigor (que responden a la consistencia interna de la resolución) son criterios prácticos, operativos. Uniendo los resultados anteriores, podemos caracterizar la adaptabilidad contextual:

Estrategia más adecuada para cada problema en función de los criterios de adecuación práctica elegidos

	Recuento	Linealización	Unidad base	Densidad
P1			Rapidez	Rigor
P2		Rigor	Rapidez	
P3				Rigor
P4		Rigor	Rapidez	



Adaptabilidad en resolución de PF

Primary school pre-service teachers | Strategies (models) | Adaptivity

Resultados

c) Análisis de la adaptabilidad contextual de los futuros maestros

Frecuencia de los patrones estratégicos de los futuros maestros adaptables contextualmente

Criterio (Estrategia) para la secuencia P1-P2-P3-P4	Frecuencia
Rapidez (UB) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	14
Rigor (D) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	14
Rapidez (UB) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	17
Rapidez (UB) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rigor (L)	3
Rapidez (UB) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rigor (L)	6
Rigor (D) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rigor (L)	5
Rigor (D) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rigor (L)	0
Rigor (D) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	12
Casos totales de adaptabilidad contextual	71

- Un tercio de los 224 futuros maestros demuestra adaptabilidad contextual: utiliza su flexibilidad, consciente o inconscientemente, para escoger la resolución más adecuada para cada problema según su contexto, teniendo en cuenta la rapidez o el rigor.

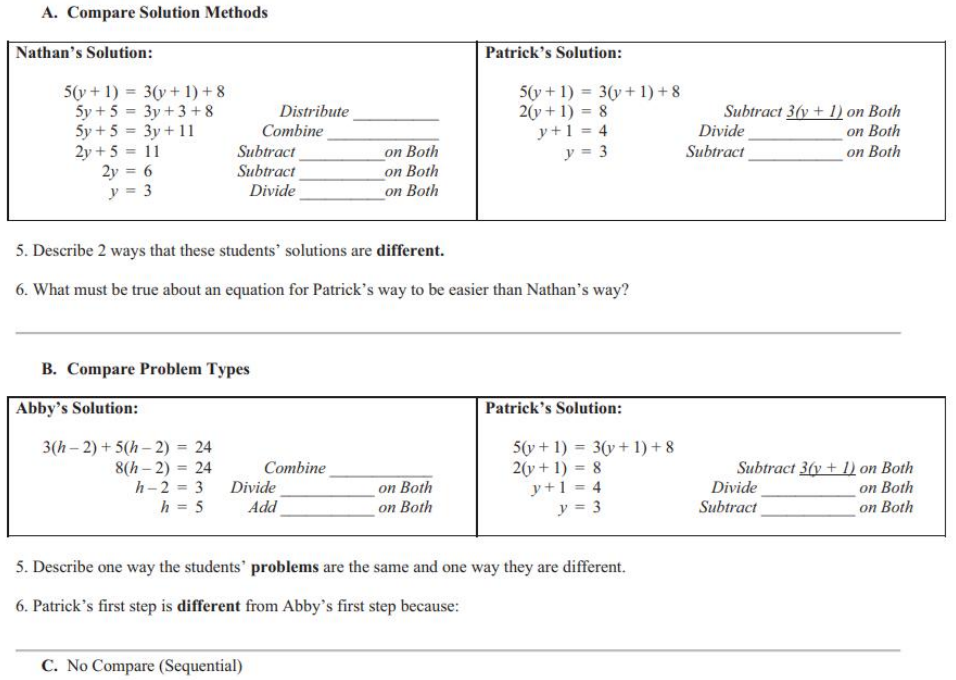
- 14 participantes siempre escoge resolución por rapidez.
- 5 siempre escoge resoluciones por rigor.
- El resto cambia de criterio de adecuación según el problema.

Discusión abierta sobre adaptabilidad…

Hemos visto criterios de adecuación que pueden asignarse a tipos de resolución para caracterizar adaptabilidad (la mejor resolución según el contexto del problema) resolviendo PF-2D…

P5. ¿Cuál es el grado de conciencia de uso de varias resoluciones en el resolutor? Análisis cualitativo de la adaptabilidad a partir de los criterios obtenidos, para conocer si su es consciente: entrevistas, preguntas abiertas en las que justificar la elección de un tipo de resolución, etc.

P5. Estudiar qué formas de comparar resoluciones (un mismo problema con distintas, problemas distintos con la misma solución) son más efectivas para desarrollar flexibilidad/adaptabilidad y si este tipo de instrucción mejora el rendimiento.



A. Compare Solution Methods

Nathan's Solution:		**Patrick's Solution:**	
$5(y+1) = 3(y+1)+8$		$5(y+1) = 3(y+1)+8$	
$5y+5 = 3y+3+8$	*Distribute* _____	$2(y+1) = 8$	*Subtract* $3(y+1)$ *on Both*
$5y+5 = 3y+11$	*Combine* _____	$y+1 = 4$	*Divide* _____ *on Both*
$2y+5 = 11$	*Subtract* _____ *on Both*	$y = 3$	*Subtract* _____ *on Both*
$2y = 6$	*Subtract* _____ *on Both*		
$y = 3$	*Divide* _____ *on Both*		

5. Describe 2 ways that these students' solutions are **different.**

6. What must be true about an equation for Patrick's way to be easier than Nathan's way?

B. Compare Problem Types

Abby's Solution:		**Patrick's Solution:**	
$3(h-2)+5(h-2) = 24$		$5(y+1) = 3(y+1)+8$	
$8(h-2) = 24$	*Combine* _____	$2(y+1) = 8$	*Subtract* $3(y+1)$ *on Both*
$h-2 = 3$	*Divide* _____ *on Both*	$y+1 = 4$	*Divide* _____ *on Both*
$h = 5$	*Add* _____ *on Both*	$y = 3$	*Subtract* _____ *on Both*

5. Describe one way the students' **problems** are the same and one way they are different.

6. Patrick's first step is **different** from Abby's first step because:

C. No Compare (Sequential)

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(4), 836.

Discusión abierta sobre adaptabilidad…

P5. Relacionar flexibilidad/adaptabilidad, rendimiento y otros factores afectivos (interés, implicación, aburrimiento, valor, ansiedad, etc.).

P5. Estudiar cuál es la "mejor" estrategia según características del problema para otros PF o problemas de modelización.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 497-533.

Bibliografía

Achmetli, K., Schukajlow, S., & Rakoczy, K. (2019). Multiple solutions to solve real-world problems and students' procedural and conceptual knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 1605-1625.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 27*(2), 45–57.

Albarracín, L., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2021). The role of context for characterising students' strategies when estimating large numbers of elements on a surface. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(6), 1209-1227.

Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2022). Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *41*(3), 183-197.

Anderson, P. M., & Sherman, C. A. (2010). Applying the Fermi estimation technique to business problems. *Journal of Applied Business and Economics*, 10(5), 33–42.

Arcos, J. H., Borromeo-Ferri, R., & Mena-Lorca, J. J. F. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(1), 99-115.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J., & Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp.597-609). New York: Springer.

Ärlebäck, J. B. & Doerr, H. M. (2015). Moving beyond a single modelling activity. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Beimbegut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education and Practice* (pp. 293-303). Springer.

Ärlebäck, J. B., & Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM*, 51(6), 979-990.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389−407.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Students teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235–268.

Buchholtz, N. (2017). How teachers can promote Mathematising by means of Mathematical City Walks. In G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications - Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 49–58). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_4

Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 165–172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Castillo-Mateo, J. J. (2012). Estimación de cantidades continuas: longitud y superficie. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada

Castillo-Mateo, Jesús; Segovia, Isidoro; Castro, Enrique; Molina, Marta (2012). *Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie.* En D. Arnau, J. Lupiañez, A. Maz(Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* -2012 (pp. 63-74). Valencia: SEIEM.

Chapman, O. (1999). In-service teacher development in mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 121-142.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16* , 1 – 6

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 3*(1), 19-36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049

Copur-Gencturk, Y., & Doleck, T. (2021 b). Linking teachers' solution strategies to their performance on fraction word problems. *Teaching and Teacher Education*, 101, 103314.

Crouch, R., & Haines, C. (2007). Novice student behaviours. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA* 12, 90.

Efthimiou, C. J., & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education*, 42(3), 253.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 605-618.

Escolano-Vizcarra, R., Gairín-Sallén, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo-Ramón, J., y Roncal-Gómez, L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del grado de educación primaria. *Contextos Educativos, 15* , 107–133.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. & Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* 31(57), 220-242.

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2020). Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 557-573.

Ferrando, I., & Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de investigación en educación matemática*, *17*, 84-97.

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2021). Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks involving estimations. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 119-128). Springer.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raf, L. M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. In G. A. Eilerts, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), Mathematical modelling and applications. Crossing and researching boundaries in mathematics education (pp. 265–275). Cham: Springer

González-Calero, J. A., Arnau, D., & Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 133-147.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 33-56.

Hagena M. (2015). Improving Mathematical Modelling by Fostering Measurement Sense: An Intervention Study with Pre-service Mathematics Teachers. In G. Stillman, W. Blum & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_14

Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. W. Stevenson, H. Azuma, & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.

Heinze, A., Star, J.R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41*, 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hickendorff, M. (2022). Flexibility and Adaptivity in Arithmetic Strategy Use: What Children Know and What They Show. *Journal of Numerical Cognition, 8*(3), 367-381. https://doi.org/10.5964/jnc.7277

Hickendorff, M., McMullen, J., & Verschaffel, L. (2022). Mathematical Flexibility: Theoretical, Methodological, and Educational Considerations. *Journal of Numerical Cognition, 8*(3), 326-334. https://doi.org/10.5964/jnc.10085

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. The Arithmetic Teacher , 30 (5), 50–54.
Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática, 28* (1), 9–38.
Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 433-444). Springer, Boston, MA.
Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7–20). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
Klock, H., & Siller, H.-S. (2020). A Time-Based Measurement of the Intensity of Difficulties in the Modelling Process. In H. Wessels, G. A. Stillman, G. Kaiser, & E. Lampen (Eds.), *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 163–173).
Ko, P. Y., & Marton, F. (2004). Variation and the secret of the virtuoso. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 43–62). Erlbaum.
Krawitz, J., Schukajlow, S., & Van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: what are important barriers? *Educational Psychology, 38*(10), 1221–1238.
Leikin, R., & Lev, M. (2007, July). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In *Proceedings of the 31st international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 161-168).
Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 8*(3), 233–251.
Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and mathematics-key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 131-153.
Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of experimental psychology: General, 124*(1), 83.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. Mathematical Thinking and Learning, 5(2), 157–189.
Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 73–90.
Lu, X., & Kaiser, G. (2022). Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 287–311.
Moreno, A., Martínez, M., & Ramírez, R. (2021). Errores de profesores de Matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(2), 109-136.
Moyer, J. C., Moyer, M. B., Sowder, L., y Threadgill-Sowder, J. (1984). Story problem formats: Verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education, 15* (1), 64–68
Newton, K. J., Lange, K., & Booth, J. L. (2020). Mathematical flexibility: Aspects of a continuum and the role of prior knowledge. *The Journal of Experimental Education, 88*(4), 503-515. https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1586629
Nistal A.A., Van Dooren W., & Verschaffel L. (2012) Flexibility in Problem Solving: Analysis and Improvement. In Seel N.M. (Eds.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_540
Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics*, *13*(4), 373-394.
Orrantia, J., Múñez, D., Vicente, S., Verschaffel, L. & Rosales, J. (2014). Processing of situational information in story problem texts. An analysis from on-line measures. *Spanish Journal of Psychology, 17*, 1–14
Peter-Koop, A. (2009). Teaching and understanding mathematical modelling through Fermi–problems. In B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), Tasks in primary mathematics teacher education (pp. 131–146). Dordrecht: Springer.
Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574.
Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! Physics Education, 43(1), 83–87

Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 31-49.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 497–533.

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 393-417.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Planning, monitoring and multiple solutions while solving modelling problems. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 177–184). PME.

Segura, C., & Ferrando, I. (2021). Classification and analysis of pre-service teachers' errors in solving Fermi problems. *Education Sciences*, *11*(8), 451.

Segura, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real. *Quadrante, 30*(1), 31-51.

Segura, C., & Ferrando, I. (2023). Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems. *Educational Studies in Mathematics*, *113*(2), 207-227.

Segura, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2023). Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101040.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41*, 619–625. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0203-7

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of experimental psychology: General, 126*(1), 71.

Silver, E. A., y Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. The Elementary School Journal, 84 (5), 529–545.

Sriraman, B., & Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, *40*(2), 205-223.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and instruction*, *18*(6), 565-579.

Stasson, M.F., Kameda, T., Parks, C.D., Zimmerman, S.K., Davis, J.H. (1991). Effects of assigned group consensus requirement on group problem solving and group members' learning. *Social Psychology Quarterly, 54*(1), pp. 25-35

Szydlik, J. E., Szydlik, S. D., & Benson, S. R. (2003). Exploring changes in preservice elementary teachers' mathematics beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 253-279.

Taplin, M. (1994). Development of a model to enhance managerial strategies in problem solving. *Mathematics Education Research Journal, 6*(1), 79-93.

Thompson, A. G. (1985). Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 281-294). Erlbaum.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 29–47. https://doi.org/10.1023/A:1020572803437

Verschaffel, L., de Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction,* 4(4), 273–294.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Preservice teachers' preferred strategies for solving Arithmetic and Algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 27-52.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), 335–359.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Netherlands: Swets & Zeitlinger

White, H. B. (2004). Math literacy. *Biochemistry and Molecular Biology Education*, 32(6), 410–411.
Wess, R., Klock, H., Siller, H. S., & Greefrath, G. (2021). *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling. A Test Instrument*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5
Widjaja, W. (2013). The Use of Contextual Problems to Support Mathematical Learning. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 4*(2), 157-168.

¡Gracias por su atención!

Carlos.segura@uv.es

Irene.ferrando@uv.es

La publicación es parte del proyecto PID2021-126707NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.