Medidas indirectas en la formación inicial de maestros: resultados preliminares de una experiencia de aula

Lluís Albarracín
Francisco Rojas

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
UNIÓN EUROPEA
FONDO EUROPEO DE DESARROLLO REGIONAL
"Una manera de hacer Europa"
AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

XXVII SEIEM 2024

01

Origen
del estudio



Francisco Rojas
Professor Agregat UAB



Lluís Albarracín
Professor Agregat *Serra Hunter* UAB



UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Matemáticas para Maestros

Asignatura de primer año del Grado de Educación Primaria.

Cohorte 2022-2023

Gran Grupo: 71 estudiantes

Pequeño Grupo: 17 sub-grupos

Universitat Autònoma de Barcelona



CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL: Son los conocimientos matemáticos necesarios para seguir con **aprovechamiento** las asignaturas de matemática y su didáctica en el grado, teniendo en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de la educación primaria.

(Castro Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014; Gorgorió y Albarracín, 2020; (Gorgorió, Albarracín, Ärlebäck, Laine, Newton & Villarreal, 2017; Gorgorió, Albarracín, Laine y Llinares, 2021).

Matemáticas para Maestros

Asignatura de primer año del Grado de Educación Primaria.

Cohorte 2022-2023

Gran Grupo: 71 estudiantes

Pequeño Grupo: 17 sub-grupos

Universitat Autònoma de Barcelona

Bloques de Contenidos: Estadística – Números – Proporcionalidad – **Medida** – Geometría.

Tipos de magnitudes y medidas
Unidades e instrumentos de medida
Procedimientos de medida y estimación
Práctica de medida

Medidas indirectas

En una *medida directa* es posible utilizar un instrumento de medida para obtener el valor numérico de una magnitud aplicando el instrumento de medida sobre el objeto a medir.

Cuando esto no es posible se puede tratar de *efectuar un procedimiento* de *medida indirecta* en el que es necesario desarrollar un modelo (generalmente geométrico) en el que se sustente el resultado a partir de mediciones auxiliares.

Es una tarea abierta en el sentido que no siempre existe un proceso bien definido que pueda ser enseñado, por lo que en muchas ocasiones deben desarrollarse modelos adecuados a la situación a estudiar.

Desde el punto de vista de la formación de maestros, el estudio de las medidas indirectas aparece como una oportunidad para revisitar y reconceptualizar diversos elementos clave del proceso de medida.

Práctica: medidas indirectas









Práctica: secuencia didáctica

Elaboración de propuesta individual (Sesión 1) → **Elaboración de propuesta grupal** (Sesión 1) → **Medición y Elaboración de Informe** (Sesión 1) → **Puesta en común y Propuesta de Mejora** (Sesión 2)

Cada estudiante desarrolla una propuesta

describiendo los pasos que piensa que son necesarios para obtener la medida final.

Los grupos elaboran una única propuesta

poniendo en común sus propuestas individuales, señalando todos los pasos necesarios.

Los grupos implementan sus estrategias de medición

y escriben un informe del proceso y los resultados.

Las estudiantes proponen mejoras

a partir de la revisión de las estrategias de medición, justificando qué aspectos es necesario mejorar.

02

Por qué medida...

...y qué se espera que aprendan

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

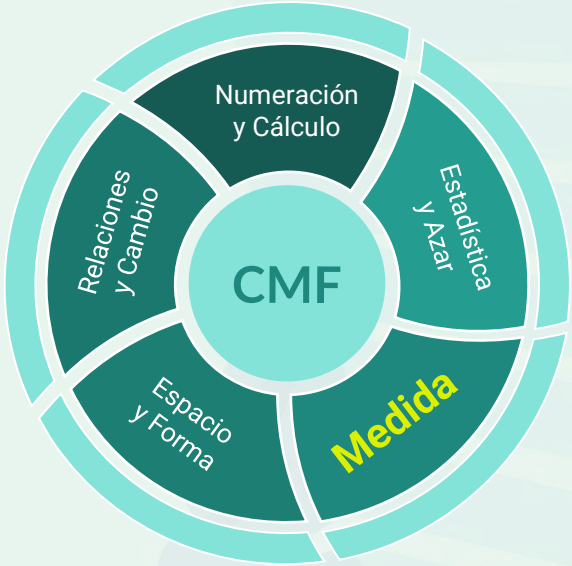
Aritmetización de la medida

Desde la escuela se suele considerar que **el alumno aprenderá a medir de forma práctica por su cuenta a través de experiencias sociales** o familiares (Chamorro, 2003).

Los materiales docentes sobre medida (ej. textos escolares) se orientan hacia la **consecución de un dominio aritmético**, con lo que se produce una desnaturalización de los objetivos del aprendizaje del sentido métrico (Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2017), **careciendo de actividades prácticas como las mediciones** (Montoro et al., 2021).

Conocimiento Matemático Fundamental (CMF)

Medida. Es necesario demostrar el conocimiento del significado de magnitud medible (ángulo, longitud, área, volumen, capacidad, masa y tiempo) y de los **procesos de medida**; el conocimiento de las unidades de medida decimales y sexagesimales correspondientes y de los mecanismos para resolver situaciones de cambio de unidades, y el dominio de los conocimientos y las habilidades necesarias para resolver situaciones diversas relacionadas con las ideas de perímetro, área y volumen.



(Gorgorió, Albarracín, Ärlebäck, Laine, Newton & Villarreal, 2017)

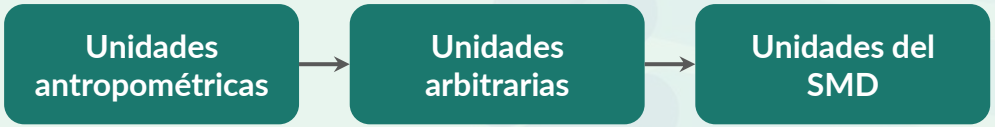
Medición y Unidades de medida

Medir involucra, al menos, los siguientes procesos:

(Reyes et al., 2013)



Unidades de Medida: cantidad de una determinada magnitud que se mantiene constante durante el proceso de medición



(Albarracín, et al., 2018)

Medir y Estimar una medida

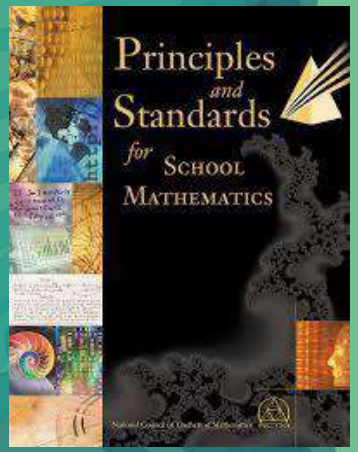
Tipos de medición (Pizarro, Albarracín y Gorgorió, 2016):

- **Directa**: se utiliza un instrumento de medida para obtener el valor numérico de una magnitud aplicándolo sobre el objeto a medir.
- **Indirecta:** a partir de la no disponibilidad de un instrumento o la inaccesibilidad del objeto a medir, se desarrolla un modelo, generalmente geométrico, en el que se sustente el resultado de la medida a partir de mediciones auxiliares.

Estimación de medidas es parte de la base para el aprendizaje de la medición física, por lo tanto, debe ser un tema incluido en la formación docente (NCTM, 2000).

- **Asignar perceptivamente un valor** o un intervalo de valores **y una unidad** correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto referente (Pizarro, Gorgorió y Albarracín, 2014, 2015).

Aprendizaje de la Medida



UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Al **final de la educación primaria**, los estudiantes deberían ser capaces de:

Procesos principales en medida

- comprender el **PROCESO DE MEDICIÓN**, hacer estimaciones, realizar mediciones y usar las medidas para describir y comparar fenómenos,
- seleccionar **UNIDADES Y HERRAMIENTAS ADECUADAS** a la medición al nivel de exactitud que se requiera en una situación en concreto,
- entender la estructura y el uso de los **SISTEMAS DE MEDIDAS**,
- ampliar su comprensión de los **CONCEPTOS BÁSICOS** de la medida (perímetro, área, volumen, medida de ángulos, capacidad, peso y masa),
- adquirir los conceptos de proporción y de otras **MEDIDAS DERIVADAS E INDIRECTAS**,
- desarrollar **FÓRMULAS Y PROCEDIMIENTOS** para determinar medidas en la resolución de problemas.

Trayectoria de aprendizaje

Estadios de desarrollo

(Dickson et al., 1991; Piaget, 1982)

- **Estadio 1: Ausencia de conservación** (cambio en el objeto no implica cambio en la cantidad de magnitud)
- **Estadio 2: Conservación y transitividad** (unidades de medidas antropométricas)
- **Estadio 3: Medición bidimensional**
- **Estadio 4: Iteración de la unidad** (unidad más pequeña que el objeto a medir)
- **Estadio 5: Etapa formal** (operaciones bidimensionales y tridimensionales mediante cálculos basados en dimensiones lineales)

Trayectoria de aprendizaje

(Clements y Sarama, 2015)

- Identificar la **longitud** como un atributo
- Comparar de forma **directa** longitudes mediante alineación de dos objetos
- Comparar de forma **indirecta** usando un tercer objeto
- **Ordenar** conjuntos de hasta 6 objetos por su longitud
- Medir un objeto de extremo a extremo (**sin unidad** establecida).
- **Repetir una unidad** sobre un objeto y r**elacionar tamaño y número**.
- Medir la longitud segmentando y efectuando **operaciones aritméticas** sobre las medidas.

03

Qué estamos aprendiendo...

... y qué resultados hemos obtenido

Universitat Autònoma de Barcelona

Caracterización de las producciones de los estudiantes



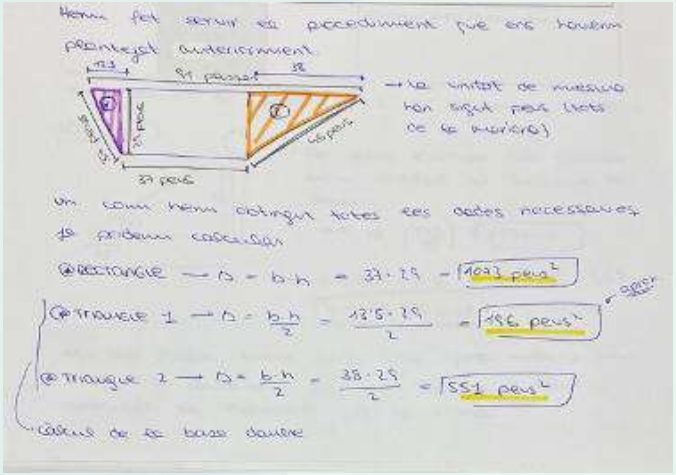




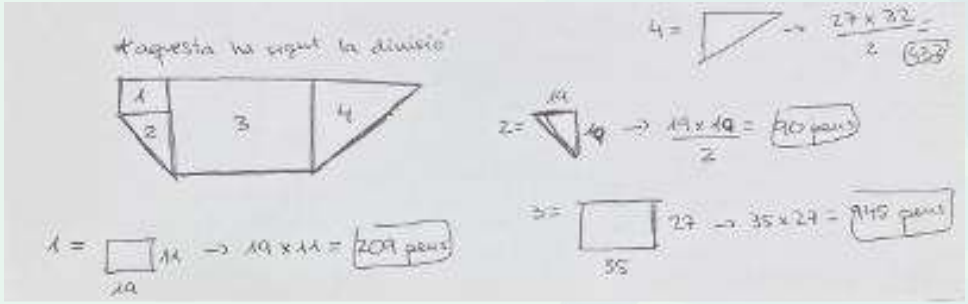


UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Producciones de los estudiantes: Área



Pies como unidad de medida lineal para áreas parciales (B3)

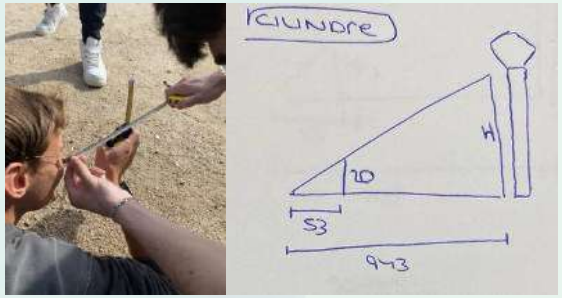


Composición aditiva de áreas parciales (A11)

Composición de áreas parciales

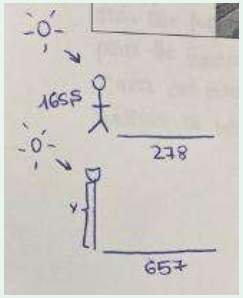
Conservación de la cantidad
Uso de fórmulas

Producciones de los estudiantes: Volumen



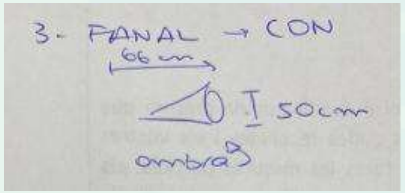
Teorema de Thales (B3)

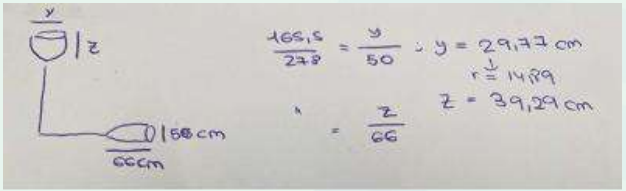
A



Proporcionalidad con una persona (A2)

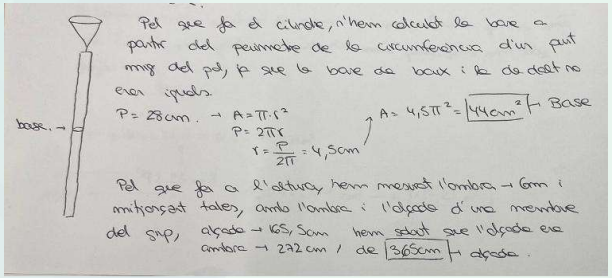
C



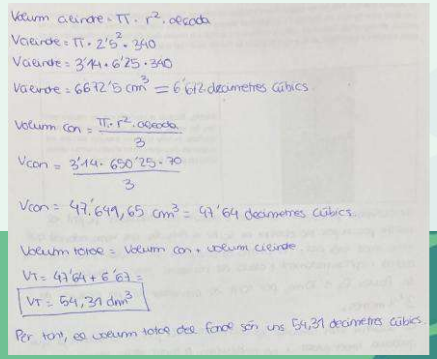


Estrategias para calcular el radio y la altura de la lámpara (cono)

B



Estrategias para calcular el volumen del mástil (A112)



Composición de las medidas de los volúmenes del mástil y la lámpara de la farola (B7)

D

Análisis 1. Árbol de soluciones



Universitat Autònoma de Barcelona

Medición y ELABORACIÓN DE INFORME (Sesión 1)

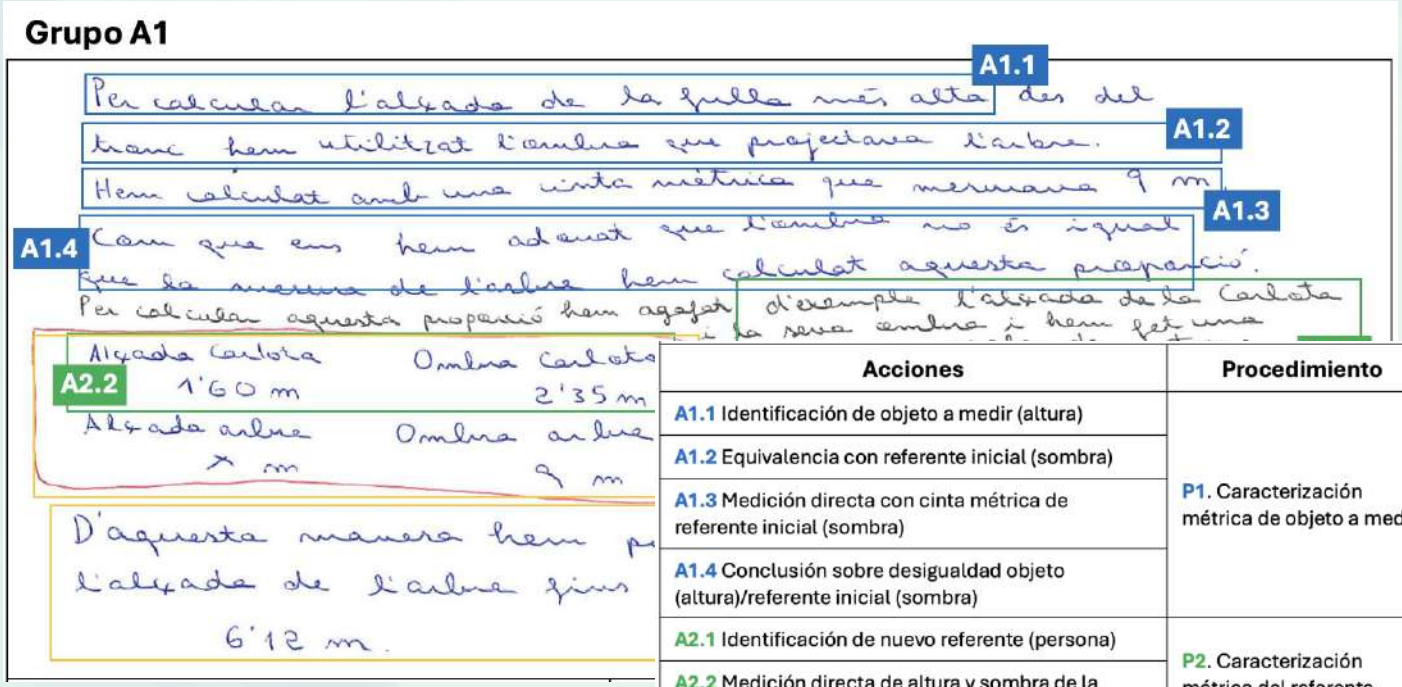
Estrategia: una forma genérica de actuar para resolver el problema

Procedimientos: cadena de acciones para resolver el problema.

Acciones: estrategias específicas para una parte concreta del problema

(Albarracín, Ferrando & Gorgorió, 2021; Albarracín & Gorgorió, 2014)

Estrategias clave sobre *medida indirecta*



Acciones	Procedimiento	Estrategia
A1.1 Identificación de objeto a medir (altura)	P1. Caracterización métrica de objeto a medir.	***Proporcionalidad Numérica***: se establece una proporción objeto/referente. → proporción entre la longitud de la sombra del árbol, y la altura de una persona y la longitud de su sombra. → Se inicia con un supuesto: altura del árbol igual longitud de sombra (no se explicita argumento para desecharlo)
A1.2 Equivalencia con referente inicial (sombra)		
A1.3 Medición directa con cinta métrica de referente inicial (sombra)		
A1.4 Conclusión sobre desigualdad objeto (altura)/referente inicial (sombra)		
A2.1 Identificación de nuevo referente (persona)	P2. Caracterización métrica del referente.	
A2.2 Medición directa de altura y sombra de la persona referente		
A3.1 Establecimiento de relación proporcional	P3. Determinación de la solución.	
A3.2 Regla de tres (¿cálculo implícito?)		
A3.3 Respuesta al problema		

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Proporcionalidad Numérica

Se establece una proporción con un objeto o referente.

Proporcionalidad Geométrica

Se establece la semejanza de triángulos aplicando Thales

Iteración Visual

Se establece un referente para estimar la medida del objeto.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Proporcionalidad Numérica

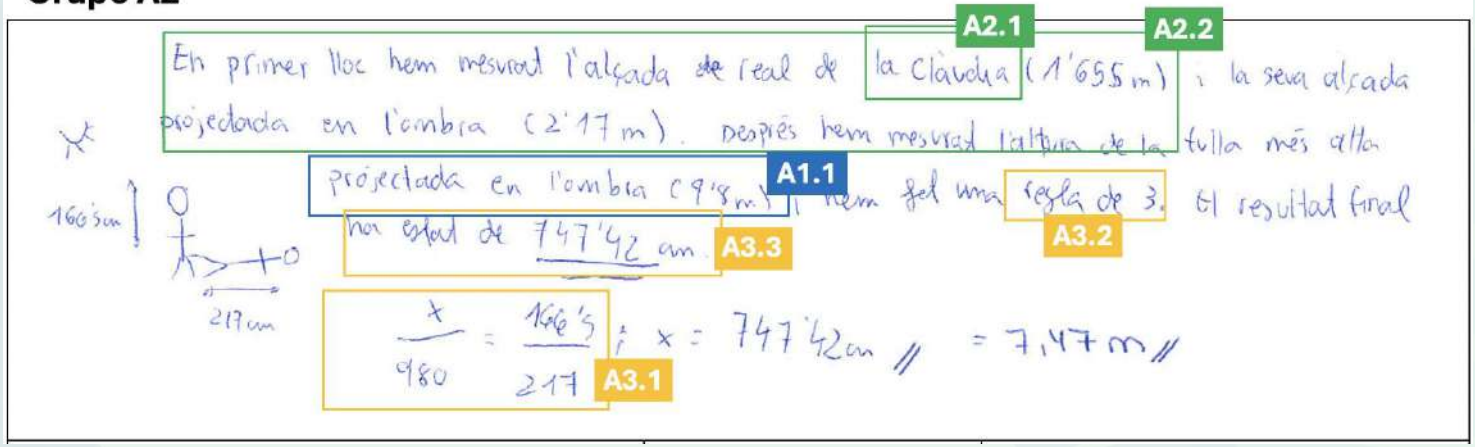
Se establece una proporción con un objeto o referente.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

Grupo A2



Estrategias clave sobre *medida indirecta*

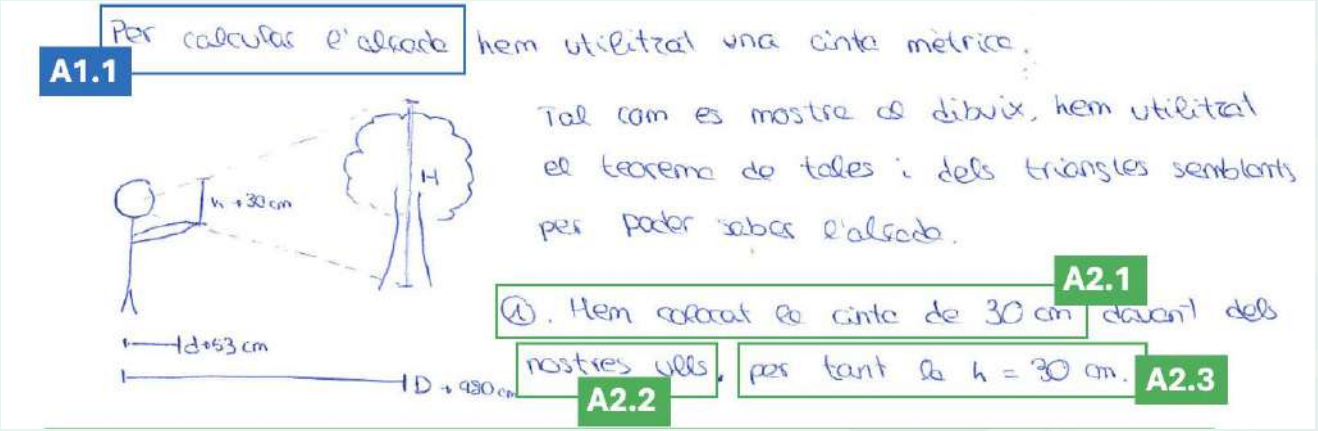
Proporcionalidad Geométrica

Se establece la semejanza de triángulos aplicando Thales

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.



Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Iteración Visual

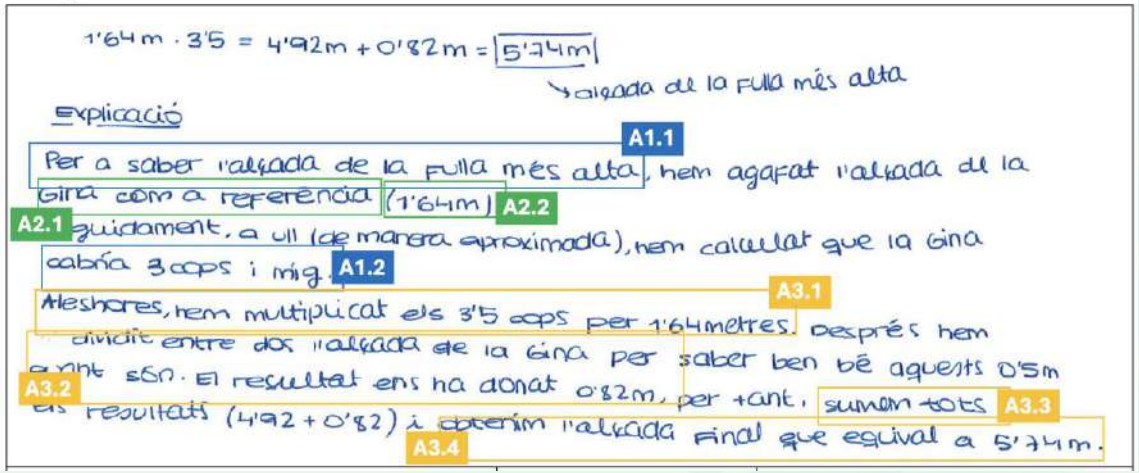
Se establece un referente para estimar la medida del objeto.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

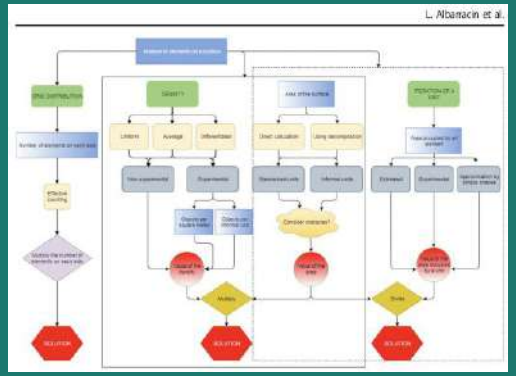
P3. Determinación de la solución.

Grupo B4

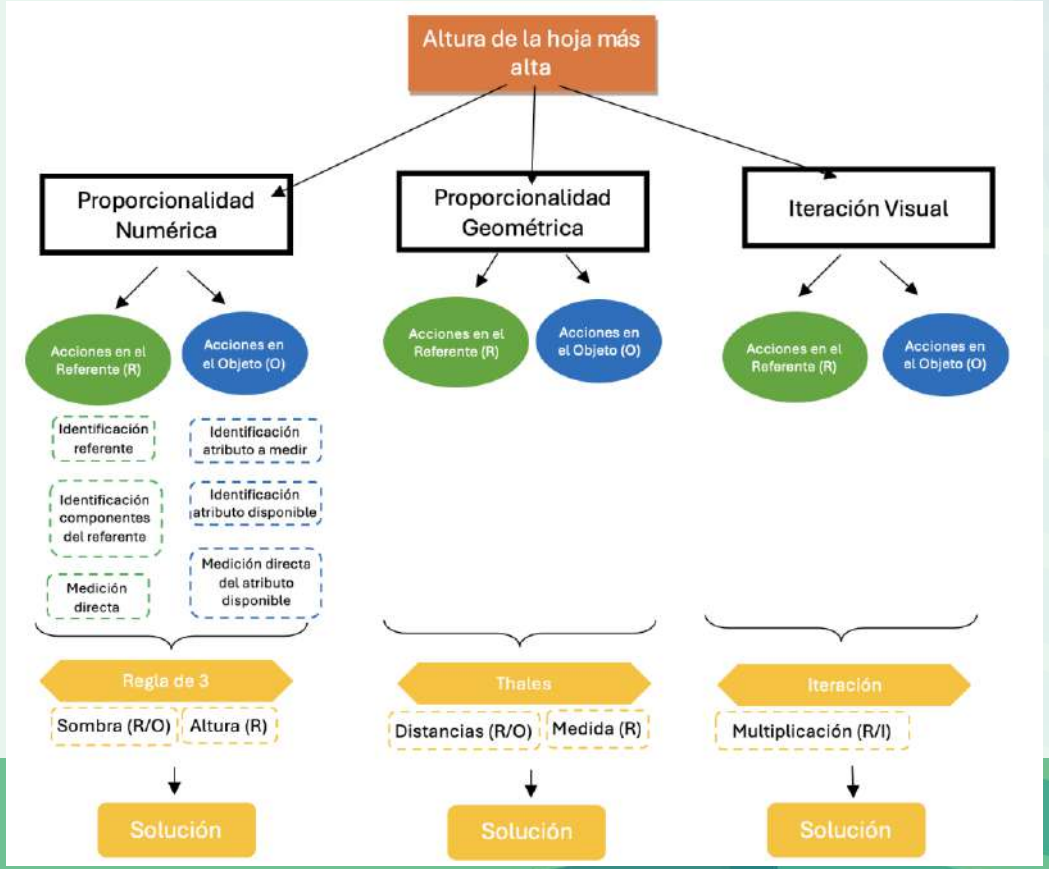


Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Árbol de Soluciones



(Albarracín, Ferrando & Gorgorió, 2021)

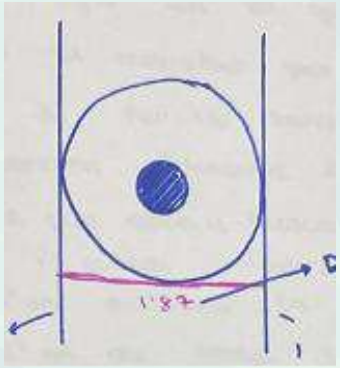


Análisis 2. Aprendizaje colaborativo

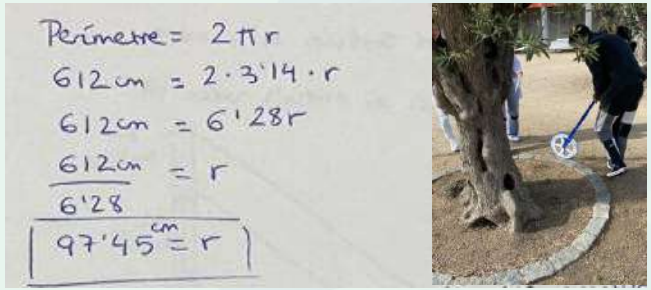

Diámetro del Alcorque

Universitat Autònoma de Barcelona

- Propuesta Individual
- Propuesta Grupal
- Medición
- Propuesta de Mejora



Desplazamiento del diámetro



Uso de fórmula

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01 **Propuesta Individual**

02 Propuesta Grupal

03 Medición

04 Propuesta de Mejora

~25% de propuestas individuales correctas.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01 Propuesta Individual

02 **Propuesta Grupal**

03 Medición

04 Propuesta de Mejora

10 de los 17 grupos presentan propuestas que obtendrían medidas adecuadas.

Esto eleva el ~**25%** de éxito individual a una participación del ~**60%** de estudiantes en estrategias correctas.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01 Propuesta Individual

02 Propuesta Grupal

03 **Medición**

04 Propuesta de Mejora

Se aumenta a un ~77% de estudiantes que participan de estrategias correctas.

Resulta clave enfrentarse a las restricciones de la realidad y las características de los instrumentos de medición.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01 Propuesta Individual

02 Propuesta Grupal

03 Medición

04 **Propuesta de Mejora**

Se eleva el porcentaje de éxito hasta casi un 90% de estudiantes que participan de estrategias correctas.

Ya no se encuentran grupos que no presenten procesos de medida suficientemente adecuados.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*



05 Evaluación Final

8. **(1,5 punts).** Les oliveres de la plaça de les oliveres tenen un espai de terra al seu voltant limitat per maons. Resulta que aquest espai es diu escocell. Descriviu detalladament dos procediments diferents per mesurar l'àrea d'un escocell de l'olivera que més us agradi. Especifiqueu els passos i instruments de mesura que faríeu servir. Quin dels dos procediments és més precís?

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

8. Primer de tot hem de tenir clara la fórmula per calcular l'àrea de l'escorcell, és a dir, la fórmula per calcular l'àrea d'un cercle. $A = \pi r^2$
D'aquesta manera, ara hem de trobar ~~l'àrea~~ el radi:

opció 1:

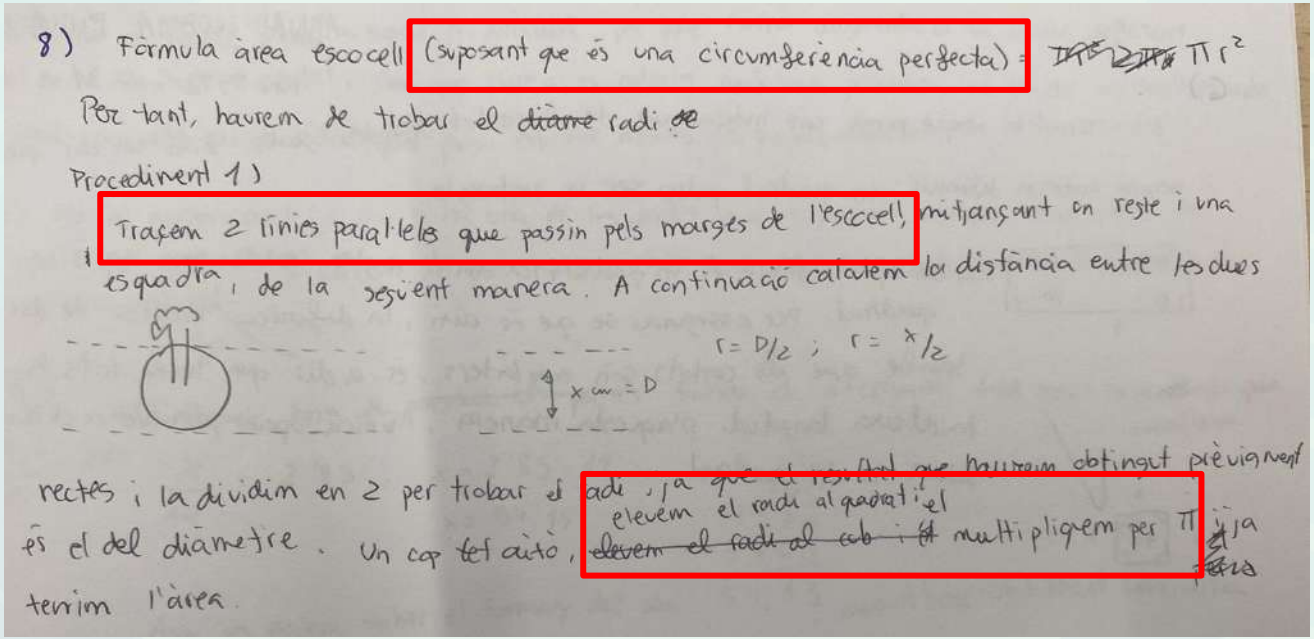


$\frac{x}{2} = r$

No pots
Mesurem el diàmetre de l'escorcell i el dividim entre 2 per trobar el radi. Un cop tinguem el radi ja podrem calcular l'àrea.



Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*



8) Fórmula àrea escocell (suposant que és una circumferència perfecta) = ~~πr^2~~ πr^2

Per tant, haurem de trobar el ~~diàmetre~~ radi de

Procediment 1)

Traçem 2 línies paral·leles que passin pels marges de l'escocell, mitjançant un regle i una esquadra, de la següent manera. A continuació calculem la distància entre les dues

$r = D/2$; $r = x/2$

rectes i la dividim en 2 per trobar el radi, ja que el resultat que haurem obtingut prèviament és el del diàmetre. Un cop fet això, elevem el radi al quadrat i el multipliquem per π i ja tenim l'àrea.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de la actividad en el **conocimiento específico** de los participantes:

Propuesta Individual: ~25%

De propuestas individuales correctas.

Evaluación (individual): ~80%

De propuestas individuales correctas.

20% restante: una parte importante ya ignoraban en la primera propuesta que la presencia del árbol no permite una medida directa.

En definitiva…

La actividad de medida indirecta contribuye a la construcción colectiva de conocimiento sobre medición de los futuros maestros.

Universitat Autònoma de Barcelona

Conocimientos matemáticos identificados
(superación de la *aritmetización* de la medida)

- Conservación de la cantidad
- (des)Composición de la medida
- Estimaciones
- Uso de fórmulas y teoremas
- Uso de relaciones proporcionales
- Uso de modelos geométricos

Potencial Didáctico

- **Trabajo Grupal**: todos los estudiantes acaben implementando estrategias complejas para obtener los valores de las medidas solicitadas
- **Aplicación del Proceso de Medida**: valorar la matemática como una actividad situada.
- **Discusión colectiva**: foco sobre el error (inherente al proceso de medida) y modelación de estrategias de control de la medición.

Práctica: medidas indirectas









Referencias

Albarracín, L., Rojas, F., & Torregrosa, A. (2026). Estrategias de medida indirecta: un enfoque de trabajo colaborativo en el terreno. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De investigación y Experiencias didácticas*, *44*(1), 165–182. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6474

Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. *Investigación en educación matemática*, *18*, 227-236.

Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 111-132). Ediciones Universidad Salamanca.

Gorgorió, N., Albarracín, L., Ärlebäck, J., Laine, A., Newton, R., & Villarreal, A. (2017). *Fundamental mathematical knowledge: Progressing its specification. Linköping University Electronic Press*.

Gorgorió, N., Albarracín, L., Laine, A., & Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria?. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 174-207.

Mengual, E., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: el caso de la medida. *REDIMAT*, *6*(2), 136-163.

Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números*, *91*, 91-103.

Pizarro, N., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). Actividades de estimación de medida: La interpretación de los docentes de educación primaria. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1177–1197.

Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). Irrupción de un concepto en el currículo: profesores de primaria definen y aplican el concepto de estimación de medida. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*, *5*(1), 1-27.

Rojas, F., & Albarracín, L. (2024). Uso de actividades de medidas indirectas en la formación de maestros. *Números*, *116*(1), 23-42.

Trabajo colaborativo en procesos de medición indirecta

Esta publicación es parte del proyecto PID2021-126707NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Francisco Rojas
Professor Agregat UAB

Lluís Albarracín
Professor Agregat *Serra Hunter* UAB

GRACIAS!

UAB Universitat Autònoma de Barcelona