Modelización matemática. Desarrollar la competencia matemática desde el mundo real

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

Carlos Segura, Irene Ferrando, César Gallart

Este curso de formación busca la transferencia a la docencia de materiales e investigaciones del grupo emergente CIGE/2024/064, financiado por la Generalitat Valenciana y el proyecto PID2021-126707NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

Índice

1. Modelización matemática en el currículo
2. Contexto en las aulas
3. Realismo de los problemas matemáticos
4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.1. Modelización matemática en el currículo



La implantación del currículo LOMLOE en el área de Matemáticas requiere familiarizarse con dos conceptos relevantes:

- Competencias específicas.

- Situaciones de aprendizaje.

Mientras que las *competencias específicas* son los procesos que caracterizan cómo se aprenden y cómo se trabajan las matemáticas, las *situaciones de aprendizaje* son contextos que exigen aplicar algunas de estas competencias movilizando contenidos matemáticos concretos.

En numerosos ámbitos se ha destacado que **trabajar las matemáticas en contexto real** es esencial en este paradigma. ¿Por qué? ¿Qué implica este tipo de trabajo? Un término será clave para explicarlo: la *modelización matemática*. El primer paso para un docente interesado sería consultar qué nos dice el currículo sobre esto.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.1. Modelización matemática en el currículo

- En el RD 2017/2022 de enseñanzas mínimas para la ESO encontramos la mención a “modelizar” como parte de la competencia específica 1, centrada en resolución de problemas.

- Además, “modelo matemático” y “modelización” aparecen mencionados en los saberes básicos de patrones, dentro del sentido algebraico.

- ¿Sois capaces de manejar una definición operativa de modelización matemática a partir del currículo del Ministerio? No hay definiciones ni información aclaratoria sobre qué es modelización matemática.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Competencias específicas.

1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

D. Sentido algebraico.

1. Patrones.

– Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.

2. Modelo matemático.

– Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
– Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.1. Modelización matemática en el currículo

La responsabilidad recae en los desarrollos autonómicos de la LOMLOE. Consultemos qué dice el desarrollo curricular en la Comunitat Valenciana para ESO y Bachillerato:

Conselleria de Educación, Cultura y Deporte

DECRETO 107/2022, de 5 de agosto, del Consell, por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria. [2022/7573]

2.3. Competencia específica 3.

Construir modelos matemáticos generales utilizando conceptos y procedimientos matemáticos funcionales con el fin de interpretar, analizar, comparar, valorar y hacer aportaciones al abordaje de situaciones, fenómenos y problemas relevantes en el ámbito social y en la iniciación a los ámbitos profesional y científico.

A lo largo de la etapa, los y las estudiantes se enfrentarán a situaciones reales que requerirán la construcción de un modelo matemático, es decir, asumir hipótesis y simplificar la realidad, buscar regularidades, patrones, relaciones entre los distintos elementos y fenómenos de la situación, que permitan transformarla en un modelo matemático sobre el que se puede trabajar matemáticamente para obtener una respuesta que debe ser validada en la situación real.

Conselleria de Educación, Cultura y Deporte

DECRETO 108/2022, de 5 de agosto, del Consell, por el que se establecen la ordenación y el currículo de Bachillerato. [2022/7578]

2.3. Competencia específica 3.

Modelizar situaciones reales y fenómenos relevantes de los ámbitos científico y tecnológico, investigando y construyendo conexiones con otras áreas del conocimiento, integrando de manera interdisciplinar conceptos y procedimientos matemáticos y extramatemáticos.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.1. Modelización matemática en el currículo

Una de las competencias específicas del currículo de Matemáticas de la ESO y de Bachillerato se centra precisamente en "construir modelos matemáticos" o "modelizar situaciones reales". La llamaremos **CE3-Competencia en modelización matemática**.

Esto demuestra la importancia de la modelización en el currículo, pues las competencias específicas son los procesos centrales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a lo largo de toda la etapa, y deben articular todos los bloques de saberes.

Hemos visto que el desarrollo curricular autonómico incluye más información que el Real Decreto. Sin embargo, al docente le surge una cuestión de primera necesidad:

1) **A partir de la lectura del currículo (especialmente de los Decretos 107/2022 y 108/2022 de ordenación y currículo de ESO y Bachillerato), ¿tengo claras las características, el potencial didáctico y la manera de plantear, implementar y evaluar problemas para desarrollar esta competencia?**

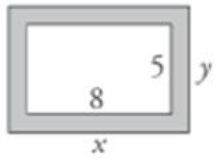
Quizá el currículo no sea lo suficientemente claro. El objetivo de este curso es responder a esta pregunta. Pero los y las docentes quizá busquen una respuesta inmediata en los libros de texto, el recurso más utilizado con diferencia (Crespo y Sinclair, 2008).

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

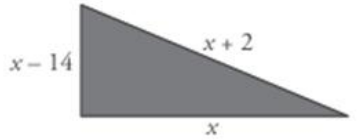
1.2. Contexto en las aulas

¿Qué tipos de problemas encontraremos en los libros de texto? Básicamente, dos tipos: intramatemáticos y verbales.

20 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada de la figura.



13 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcula la longitud de los tres lados.



Problemas intramatemáticos. Son aquellos cuya situación, datos, relaciones y objetivos pertenecen exclusivamente al mundo matemático, sin referencia al mundo real (García-Cerdá et al., 2024). Por tanto, sólo requieren conocimientos matemáticos para ser planteados, comprendidos y resueltos.

- ¿Son problemas de modelización? Acudamos las definiciones de la CE3 que aparecía en los Decretos autonómicos 107 y 108 de 2022: se menciona que un modelo matemático se construye a partir de una situación o fenómeno real que demanda respuesta (por ejemplo, una predicción o la obtención de información relevante), y que el objetivo del modelo es precisamente describir esa situación para obtener dicha respuesta, que debe ser interpretada y validada en dicha situación.

- La pregunta, por tanto, tiene una clara respuesta negativa.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.2. Contexto en las aulas

38 ▼▼▽ Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba.

Si el saldo actual es de 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

19 ▼▼▽ La suma de las edades de una madre y su hijo es 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

8 ▼▼▽ En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:

VELOCIDAD (km/h)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
N.º DE COCHES	5	15	27	38	23	17

a) Haz una tabla reflejando las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje circula a más de 90 km/h?

Problemas verbales. Son problemas matemáticos presentados en un texto narrativo o descriptivo expresado en lenguaje natural. El estudiante debe comprender el texto, identificar los datos y relaciones, y transformar el enunciado en términos matemáticos para encontrar una solución (Verschaffel et al., 2000).

- El texto de los problemas verbales narra o describe una situación cotidiana o ubicada en un *escenario* real.
- ¿Son problemas de modelización?
- La palabra escenario es pertinente. A continuación, vamos a profundizar en el realismo de los problemas matemáticos.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

Tarea 1. a) Lee el artículo de Claudi Alsina (2007) "Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes".
b) A continuación, contesta el Cuestionario 1.

Encontrarás el PDF del artículo y el cuestionario en el Aula Virtual de este curso, en la sección del Módulo 1.

SI ENRIQUE VIII TUVO 6 ESPOSAS, ¿CUÁNTAS TUVO ENRIQUE IV? EL REALISMO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SUS IMPLICACIONES DOCENTES

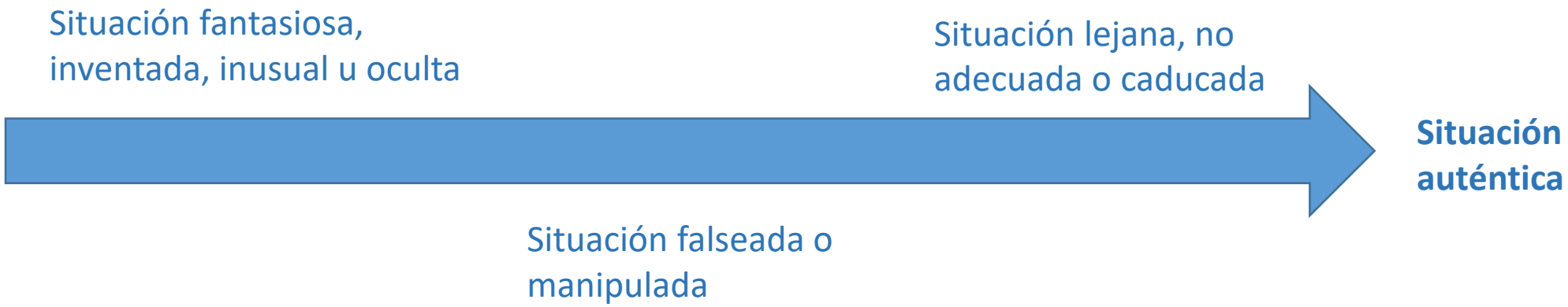
Claudi Alsina *

SÍNTESIS: El objetivo de este artículo es realizar una reflexión sobre la realidad como referente para nuestra actuación docente, prestando especial atención a las falsas realidades tan presentes aún en nuestra enseñanza e indicando las características deseables del realismo educativo. Gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana. El artículo ejemplifica con ejercicios extraídos de libros de texto la tendencia hacia problemas muy alejados de la realidad y de la vida cotidiana y que por tanto no permiten acercar el interés de los estudiantes hacia la disciplina. Finalmente propone diez problemas ejemplares que permiten mostrar a la matemática como útil para la interpretación y modelización de la realidad, capaz de sorprender y emocionar y necesaria para la toma de decisiones ciudadanas.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

Tras leer el artículo de Claudi Alsina, queda claro que se puede establecer un ***gradiente de realismo*** en los problemas matemáticos verbales.



- Los problemas con realidades inventadas, ocultas o inusuales son más fantasiosos, es decir, menos realistas que los problemas con realidades manipuladas para fines didácticos o con realidades lejanas o caducadas.

- Pero en todos ellos podemos decir que el contexto es **pseudo-realista**, pues actúa como un escenario que realmente no es importante para la resolución del problema. Los problemas verbales presentan, por lo tanto, un "disfraz" de realidad que no requiere ser matematizado, sino directamente traducido a matemáticas.

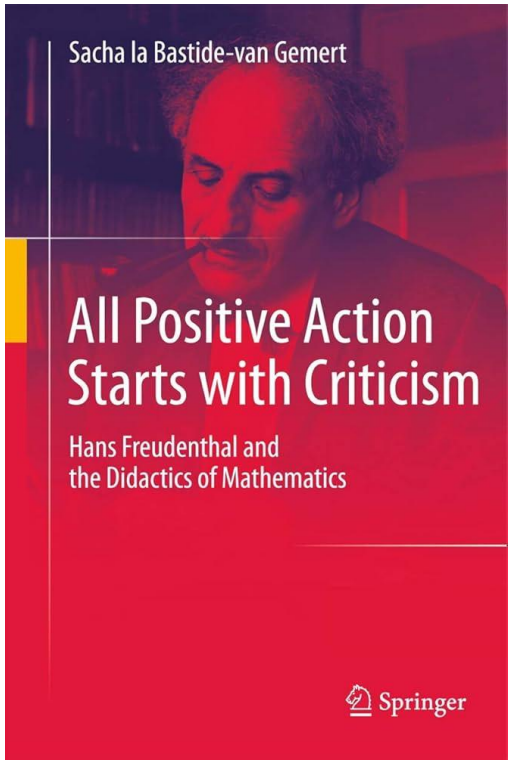
Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

- Vicente y Manchado (2017), tras un análisis sistemático de los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, encontraron una predominancia de problemas intramatemáticos rutinarios y de problemas verbales que presentan situaciones en contextos estereotipados (disfrazados). En Secundaria, el resultado es muy similar. La concepción mayoritaria de los problemas matemáticos es como un decorado sobre el que aplicar el contenido matemático aprendido (Szydlik et al., 2003).

- La matematización es condición necesaria para que un problema sea realista. Matematizar implica que **el contexto es un actor en el proceso de resolución**, no un decorado. Para explicarlo mejor, hablemos de la Educación Matemática Realista (EMR).

- La EMR nace en Holanda durante los años 70, impulsada por Hans Freudenthal. Se opone a una enseñanza mecánica y formalista de las Matemáticas. El enfoque de la EMR se basa en seis principios de enseñanza y aprendizaje:



'What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics'

Freudenthal, 1968

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

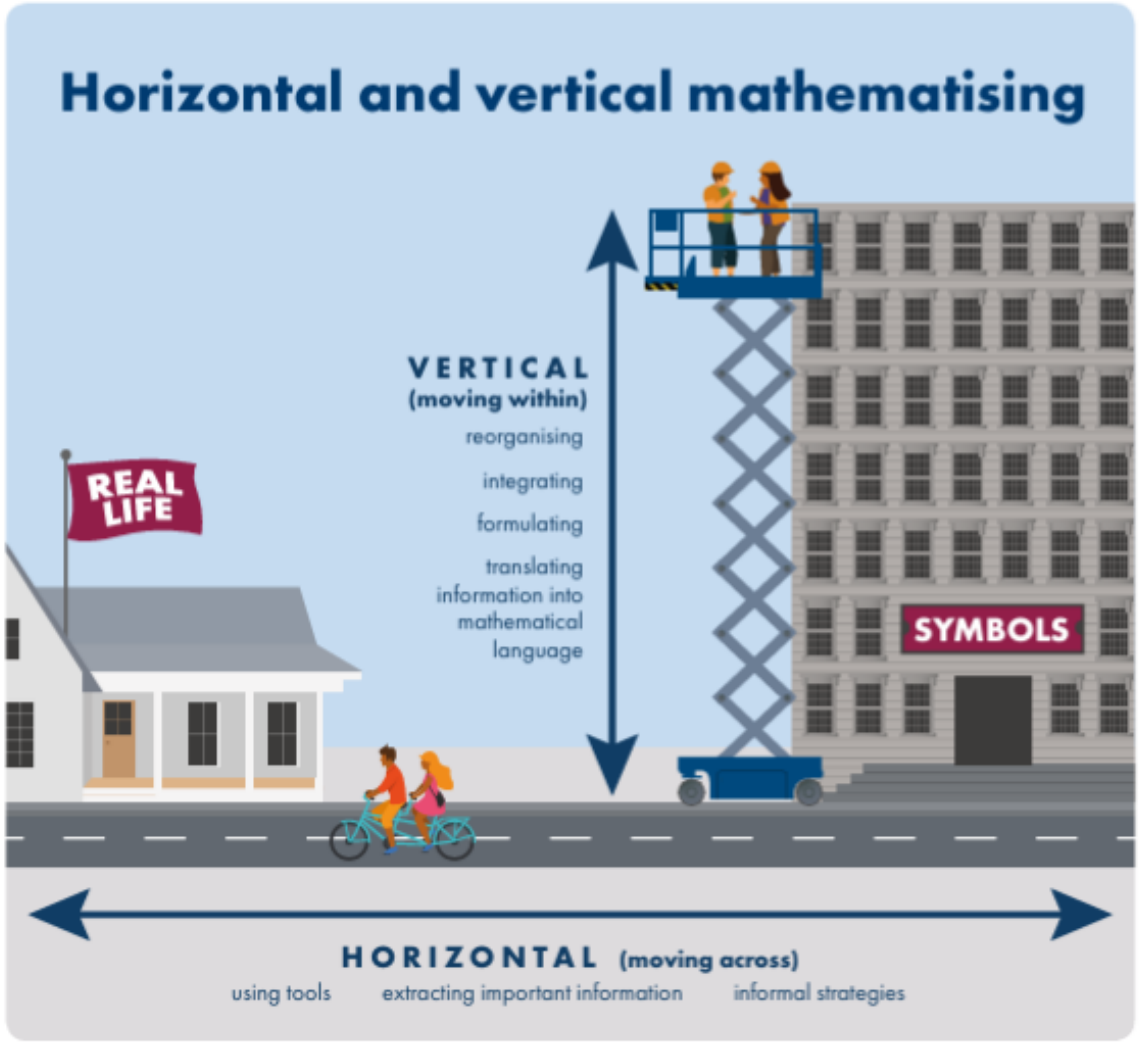
1.3. Realismo de los problemas matemáticos

a) Principio de actividad: Los estudiantes se enfrentan a los problemas "construyendo" las matemáticas como participantes activos durante el proceso de aprendizaje.

Este proceso de construcción se denomina matematización (Treffers, 2012) y puede estudiarse en dos niveles: horizontal y vertical.

- *Matematización horizontal:* consiste en trasladar un problema desde su contexto a contenidos y procesos matemáticos.
- *Matematización vertical:* son los procesos de organización, generalización o abstracción del propio contenido matemático.

Se puede consultar un resumen de estos procesos en el documento del Aula Virtual *CambridgeEspresso__realistic_contexts_in_mathematics*.



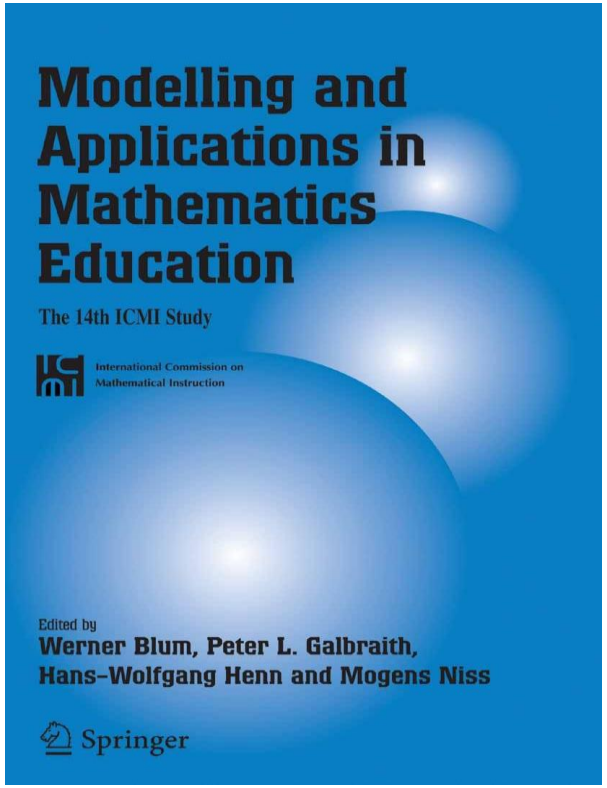
Adapted from Treffers (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

b) Principio de realidad: Se debe partir de contextos y situaciones realistas para que los estudiantes sientan la necesidad de matematizar la situación del problema.

En el ICMI 14 se define realidad como: "*Todo lo que tenga que ver con naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas*."



c) Principio de nivel: En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión:

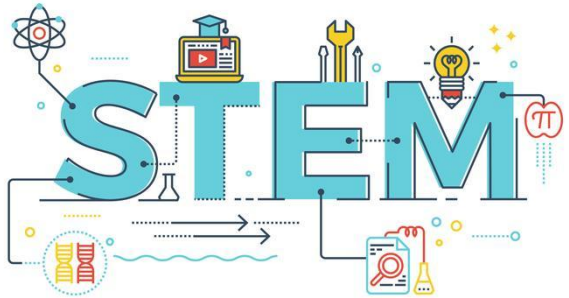
(i) Invención de soluciones informales ligadas al contexto (por ejemplo, a través de la simulación, del ensayo-error, etc.);

(ii) esquematizaciones generales de la situación;

(iii) relaciones generales aplicables a otros contextos.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos



d) Principio de entrelazamiento: La resolución de situaciones realistas exige, a menudo, establecer conexiones entre diferentes conceptos y herramientas matemáticas.

Por tanto, los problemas basados en la realidad permiten interrelacionar e integrar los contenidos matemáticos.

e) Principio de interacción: El aprendizaje de las matemáticas es una actividad social promovida por la interacción entre estudiantes y la interacción entre estudiante y profesor.

Esto implica que cada estudiante sigue su propia trayectoria de aprendizaje, y que el profesor debe anticiparse a los obstáculos en el proceso de aprendizaje que pueden darse durante la interacción, además de incluir la reflexión colectiva en el aula.

f) Principio de orientación: el docente es un mediador entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales de las matemáticas.

Por tanto, debe promover “espacios” a través de los cuales los estudiantes puedan construir conocimiento matemático.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

Resumiendo: Principios para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

El aprendizaje de las Matemáticas es un camino de lo concreto a lo abstracto. Bruner (1966) señala que el alumno debe aprender activamente, y que la comprensión conceptual pasa por tres fases: **Concreto - Pictórico - Abstracto** (enfoque **C-P-A**).

Skemp (1976) define 2 tipos de comprensión: la **instrumental**, en la que los alumnos deben aprender a operar sin conocer la razón de esa operación; y la **relacional**, donde sin saber operar conocen el razonamiento lógico que explica lo que deben hacer. **Foco en el aprendizaje relacional, reforzado por el instrumental para hacerlo significativo.**

Según recoge De Lange (1996), la **EMR** se basa en las siguientes características, conectadas con las teorías socio-constructivistas:

- Los **contextos** como vehículos para el tránsito de lo concreto a lo abstracto.
- La **modelización** (*simulación* en su versión más simple) como eje del proceso de matematización.
- El fomento de **producciones libres** de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

Del enfoque funcional de la EMR deriva la noción de competencias matemáticas (competencias específicas en el currículo LOMLOE). Niss (2002) define las competencias matemáticas como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones en las cuales las matemáticas juegan o pueden ejercer un papel.

Las competencias matemáticas necesitan, para su desarrollo integral, el trabajo en problemas realistas, ya que tienen que ver con:

- Las matemáticas como “manera de hacer”.
- La utilización de herramientas matemáticas.
- El conocimiento matemático en funcionamiento.

Y aquí volvemos al punto de partida, pero con mucha más información: la matematización de la realidad forma parte de la tercera competencia específica (CE3, modelización) de los Decretos 107 y 108 de 2022.



Y para desarrollar la modelización matemática hacen falta problemas realistas, problemas que planteen situaciones de aprendizaje significativo.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.3. Realismo de los problemas matemáticos

De hecho, cuando vamos a la definición de situación de aprendizaje en los Decretos 107 y 108 de 2022, encontramos que las piezas comienzan a encajar…

ANEXO III

Situaciones de aprendizaje

La adquisición y el desarrollo de las competencias clave del Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica, que se concretan en las competencias específicas de cada materia o ámbito de la etapa, se verán favorecidos por metodologías didácticas que reconozcan al alumnado como agente de su propio aprendizaje. Para ello es imprescindible la implementación de propuestas pedagógicas que, partiendo de los centros de interés de los alumnos y alumnas, les permitan construir el conocimiento con autonomía y creatividad desde sus propios aprendizajes y experiencias. Las situaciones de aprendizaje representan una herramienta eficaz para integrar los elementos curriculares de las distintas materias o ámbitos mediante tareas y actividades significativas y relevantes para resolver problemas de manera creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad.

Para que la adquisición de las competencias sea efectiva, dichas situaciones deben estar bien contextualizadas y ser respetuosas con las experiencias del alumnado y sus diferentes formas de comprender la realidad. Asimismo, deben estar compuestas por tareas complejas cuya resolución conlleve la construcción de nuevos aprendizajes. Con estas situaciones se busca ofrecer al alumnado la oportunidad de conectar y aplicar lo aprendido en contextos cercanos a la vida real. Así planteadas, las situaciones constituyen un componente que, alineado con los principios del Diseño universal para el aprendizaje, permite aprender a aprender y sentar las bases para el aprendizaje a lo largo de la vida, fomentando procesos pedagógicos flexibles y accesibles que se ajusten a las necesidades, las características y los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado.

… porque los problemas realistas que permiten desarrollar la competencia de modelización cumplen las características de situación de aprendizaje, que observamos son muy similares a los seis principios de la EMR.

Ni los problemas intramatemáticos rutinarios ni los problemas verbales con realidad esterotipada responden a estos principios.

Necesitamos nuevos problemas, **y no están en los libros de texto.**

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Volvamos a la pregunta posterior a la lectura de la CE3 en modelización matemática del currículo, ahora que ya tenemos más información:

¿Tengo claras las características, el potencial didáctico y la manera de plantear, implementar y evaluar problemas para desarrollar la competencia en modelización matemática?

Quizá la pregunta sea demasiado compleja. Vamos a empezar por lo más básico, y esto será la segunda tarea de este Módulo 1:

Tarea 2. ¿Soy capaz de distinguir los problemas que desarrollan la competencia en modelización matemática (los llamaremos problemas de modelización) de otros problemas?

Para ello, tendrás que acceder al PDF del Aula Virtual (Módulo 1) *Tarea 2_Identificación de problemas de modelización*. Encontrarás seis problemas (también están en esta presentación, a continuación).

Debes analizarlos, para ello, te será útil resolverlos. Luego, tendrás que contestar el cuestionario de la Tarea 2 del Aula Virtual.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 1.

Por motivos de salud las personas tienen que limitar sus esfuerzos, por ejemplo al practicar deporte, para no exceder una cierta frecuencia cardiaca.

Durante años la relación entre la frecuencia cardiaca máxima recomendada de una persona y la edad de dicha persona se describió según la siguiente fórmula:

frecuencia cardiaca máxima recomendada = 220 - edad

Investigaciones recientes muestran que esta fórmula debería modificarse ligeramente. La nueva fórmula es como sigue:

frecuencia cardiaca máxima recomendada = 208 - (0,7 x edad)

Un artículo periodístico declaraba: "*«El resultado de utilizar la nueva fórmula en vez de la antigua es que el número de latidos máximo recomendado por minuto para personas jóvenes baja ligeramente, y para personas mayores aumenta ligeramente».*

¿De qué edad en adelante aumenta la frecuencia cardiaca máxima recomendada como resultado de la introducción de la nueva fórmula? Muestra tu trabajo.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 2.

Una pelota cae desde una altura y rebota hasta una tercera parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Expresa el espacio total recorrido por la pelota hasta que quede en reposo.



Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 3.

El **Festival de Artes Escénicas Contemporáneas de Glastonbury** es el mayor festival al aire libre de música y artes escénicas del mundo. En 2005, el área vallada del festival tenía más de 3,6 km² (900 acres), y hubo más de 385 actuaciones en directo. Muchos de los asistentes al festival llevan sus propias tiendas de campaña y duermen dentro de la zona del festival.



Los organizadores necesitan limitar el número de entradas a la venta y el número de tiendas que pueden instalarse para poder garantizar la seguridad. ¿Qué les aconsejarías?

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 4.

ESCUELA DE EQUITACIÓN

Pablo busca una escuela de equitación donde su caballo pueda tener un box y recibir comida. También le gustaría hacer cursos de equitación en esa escuela.

Pablo encuentra dos hípicas cercanas a su casa.

ESCUELA DE EQUITACIÓN BANNERT	ESCUELA DE EQUITACIÓN LARSEN
Número de caballos: 26 Alquiler mensual box: 100€ Alimentación mensual caballo: entre 80 y 100€ (dependiendo calidad y cantidad) Cuidados caballo: no incluido Precio de la hora de equitación: 15€ 25 minutos de su casa	Número de caballos: 52 Alquiler mensual box: 120€ Alimentación mensual caballo: 120€ Cuidados caballo: 20 € Dispone de Club Social Precio de la hora de equitación: 12€ 15 minutos de su casa

¿Cuándo merece la pena ir a Bannert y cuándo a Larsen? Escribe tu solución.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 5.

Un centro cultural quiere estimar el coste diario de funcionamiento *C* (en euros) en función de:

- El número de horas de apertura del centro ese día (*h*).
- El número de personas asistentes durante el día (*p*).



Según la gestión del centro, el coste fijo de funcionamiento diario es de 250 €. Cada hora de apertura añade 40 € al coste, mientras que cada persona asistente añade 3 €.

Si el centro abre más de 8 horas en un día, hay que contratar personal adicional, lo que supone un coste extra fijo de 120 €.

a) Plantea una expresión para obtener el coste de funcionamiento diario *C* a partir de *h* y *p*.
b) Calcula el coste si el centro abre 9 horas y asisten 85 personas.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

1.4. ¿Qué es y qué no es un problema de modelización?

Problema 6.

Durante la procesión del Corpus de Valencia, se lleva a cabo la danza de La Magrana. Durante este baile, los participantes sostienen cintas fijadas en lo alto de un palo. Con estas cintas de 15 metros, los participantes bailan alrededor del palo, de manera que enredan y desenredan las cintas alrededor del mismo.



¿A qué distancia del palo central se encuentran los bailarines al comienzo del baile (las cintas están muy estiradas)? Explica cómo lo resolverías.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

Bibliografía

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas,¿ cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación, 43*, 85-101.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems*. Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 395–415.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A.J. Bishop (Ed), *International Handbook of Mathematics Education, Part I* (pp. 49-97). Utrecht: Kluwer Academia Press.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3–8.

García-Cerdá, C., Segura, C., & Ferrando, I. (2024). Influence of the type of mathematical problems on students' and pre-service teachers' interest and performance. A replication and elaboration study. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *4*(1), 125-159.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagtis, Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

Bibliografía

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Szydlik, J. E., Szydlik, S. D., & Benson, S. R. (2003). Exploring changes in pre-service elementary teachers' mathematical beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 253–279.

Treffers, A. (2012). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction—The Wiskobas Project* (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vicente, S., & Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles.*PNA*, *11*(4), 253–279.