Modelización matemática. Desarrollar la competencia matemática desde el mundo real

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Carlos Segura, Irene Ferrando, César Gallart

Este curso de formación busca la transferencia a la docencia de materiales e investigaciones del grupo emergente CIGE/2024/064, financiado por la Generalitat Valenciana y el proyecto PID2021-126707NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Módulo 2

Índice

1. Qué no es un problema de modelización

2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 1. Qué no es un problema de modelización

En el módulo anterior hemos visto que hay un consenso en la educación matemática y en los programas educativos de muchos países –incluido España y su concreción curricular en la Comunidad Valenciana– en destacar la importancia de resolver problemas que presentan una situación real que debe ser matematizada, construyendo a partir de la realidad conocimiento matemático. A esos problemas los llamamos problemas de modelización.

También hemos visto que la idea de situación real es problemática y puede llevar a situaciones entre qué es y qué no es un problema de modelización. En la segunda tarea del Módulo 1 has tenido que juzgar diagnósticamente si los problemas presentados eran de modelización.

En este Módulo 2 proporcionaremos una caracterización de este tipo de tareas que facilita una reflexión más profunda y un juicio más preciso sobre el enunciado del problema. También mostraremos herramientas para analizar las soluciones a los problemas de modelización.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 1. Qué no es un problema de modelización

Descartados los problemas intramatemáticos, la dificultad la tenemos en los problemas verbales y ciertos **presupuestos ocultos** (Greer, 1997) sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que adulteran el realismo de las tareas y persisten en parte del profesorado y del alumnado:

- Todo problema presentado por el docente o por el libro de texto puede resolverse y tiene sentido.
- Cada problema tiene una única respuesta correcta y ésta es precisa y numérica.
- La solución de cada problema puede y debe obtenerse ejecutando operaciones con los números del problema, y casi con toda seguridad, con todos ellos (correspondencia biunívoca entre cantidades del enunciado y cantidades usadas en su resolución).
- La tarea puede realizarse con las matemáticas que se han aprendido, aplicando los contenidos expuestos en las clases más recientes.
- La solución final implica números “limpios”.
- El problema por sí mismo contiene toda la información necesaria.
- El contexto que presentan los problemas del colegio es meramente decorativo, por lo que no hay que preocuparse si viola los conocimientos previos o las intuiciones basadas en las experiencias cotidianas.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

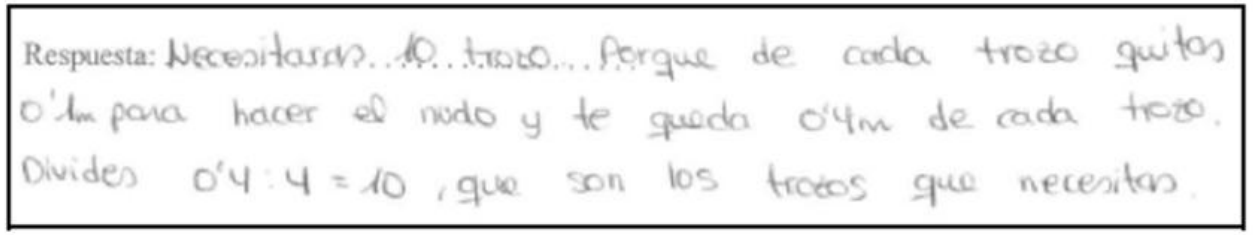
Sección 1. Qué no es un problema de modelización

Como veremos, los sobreentendidos anteriores sobre la resolución de problemas estándar o convencional en las aulas impiden desarrollar actividades de modelización matemática.

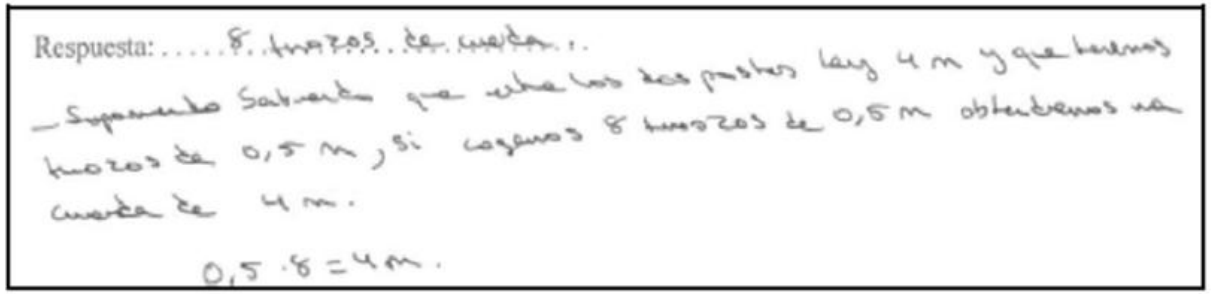
Incluso fuerzan a lecturas no realistas de problemas que podrían serlo. Así que a veces el realismo del problema también depende de su interpretación. Por ejemplo:

Un hombre quiere tener una cuerda lo suficientemente larga para unir dos postes separados entre sí 4 metros, pero solo le quedan trozos de cuerda de medio metro cada uno. ¿Cuántos trozos necesitaría para poder unir los postes?

Lectura "realista" del problema: suposición sobre la realidad implícita



Lectura como problema verbal convencional, no realista



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

En los problemas de modelización el realismo es condición necesaria, no están limitados por ninguno de los presupuestos ocultos enunciados por Greer (1997). En los problemas de modelización, la interpretación exige una **fuerte conexión con la realidad:** el contexto del problema juega un papel en el proceso de resolución (¡el contexto es un actor, no un decorado!).

Los **problemas de modelización** exigen traducir la realidad a las matemáticas y viceversa (Niss y Blum, 2020).



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización como AAC

Esta traducción es lo que se llama desarrollar un modelo matemático, pero la definición de Niss y Blum (2020) no es suficientemente operativa para poder diagnosticar con precisión si un problema es o no de modelización.

Dando un paso más, Maaß (2007) ofrece la siguiente **caracterización AAC de los problemas de modelización**:

1. Son problemas auténticos: la situación que plantean existe en un mundo real, es significativa para el resolutor y no ha sido manipulada, por lo que el resolutor necesita integrar *conocimiento extra-matemático* sobre dicha situación en el proceso de resolución del problema. El contexto del problema juega, por tanto, un papel activo en la solución.

2. Son problemas abiertos: la situación que se plantea permite más de una vía para llegar a la solución y más de una solución. A veces no se hace una pregunta cerrada; otras veces la pregunta está claramente formulada, pero la respuesta depende de la perspectiva que el resolutor ha tomado al inicio del problema.

3. Son problemas complejos: el resolutor no es capaz de resolverlos aplicando una cadena directa de procedimientos, no anticipa en su lectura la manera de resolverlos. Al contrario, un problema complejo debe descomponerse en subproblemas y resolverse cada uno de ellos para llegar a la solución. A veces también requieren exploración.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Vamos a analizar los problemas de nuevo los seis problemas de la segunda tarea del Módulo 1, y a determinar cuáles de ellos cumplen la caracterización AAC de los problemas de modelización.

Problema	Auténtico	Abierto	Complejo	Modelización
Problema 1	No, el enunciado presenta una situación real pero ya está modelizada, es decir, previamente estructurada matemáticamente.	No, se espera una solución determinada por los datos (funciones lineales predefinidas).	No, el resolutor puede conocer de antemano el proceso de resolución (encontrar intersección).	**No**
Problema 2	No, la realidad física del enunciado está manipulada (la pelota siempre bota un tercio de la altura anterior).	No, se espera una expresión que relaciona altura y espacio recorrido.	Podría serlo, aunque depende de la destreza matemática del resolutor.	**No**

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Problema	Auténtico	Abierto	Complejo	Modelización
Problema 3	Sí, el enunciado presenta una situación que podría ser auténtica, con algunos datos que suelen ser accesibles en este tipo de eventos.	Sí, la pregunta no determina qué tipo de solución se espera, y además, cualquier solución dependerá de las decisiones tomadas por el resolutor en el proceso.	Sí, hay muchos subproblemas que resolver, suposiciones que hacer, exploración de posibilidades, muchas variables que pueden incluirse.	Sí
Problema 4	Sí, la situación podría ser auténtica, con algunas opciones que suelen incluirse en estas escuelas.	Sí, la decisión depende de las suposiciones y de qué variables se prioricen y qué datos se tomen como relevantes.	Sí, aunque sea matemáticamente sencillo, requiere resolver subproblemas de selección y priorización de datos, no es directo.	Sí

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Problema	Auténtico	Abierto	Complejo	Modelización
Problema 5	No, es una situación disfrazada de realidad, pero muy manipulada y simplificada para ofrecer variables y relaciones predeterminadas.	No, hay una única expresión que da respuesta a la pregunta a) y que permite dar respuesta directa a la pregunta b).	Depende de la habilidad del resolutor, pero la expresión puede obtener por una cadena directa de procedimientos sin necesidad de resolver subproblemas.	**No**
Problema 6	Sí, la situación es auténtica, solamente se proporciona un dato que es fijo (longitud cuerda) y verosímil.	Sí, la distancia depende de las suposiciones y estimaciones que el resolutor haga sobre la altura del palo que sujeta la figura central y la altura a la que cogen los cordones los bailarines.	Sí, aunque sea matemáticamente sencillo, requiere darse cuenta y resolver los subproblemas relativos a la configuración espacial (altura palo, etc.)	**Sí**

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Esta caracterización nos ayuda a juzgar qué problemas pueden ser problemas de modelización. En Ferrando et al. (2025) estudiamos si contar con esta caracterización AAC ayudaba a futuros profesores de Primaria a juzgar con precisión si los problemas son de modelización.

Los resultados de este estudio muestran **que contar con una guía didáctica con la caracterización AAC es casi tan efectivo para identificar los problemas de modelización como cursar durante un cuatrimestre un curso sobre problemas de modelización**. Y ambas condiciones (la guía didáctica con la caracterización AAC y el curso de modelización) son mucho más efectivas que la lectura del currículo LOMLOE y su concreción en la Comunidad Valenciana.

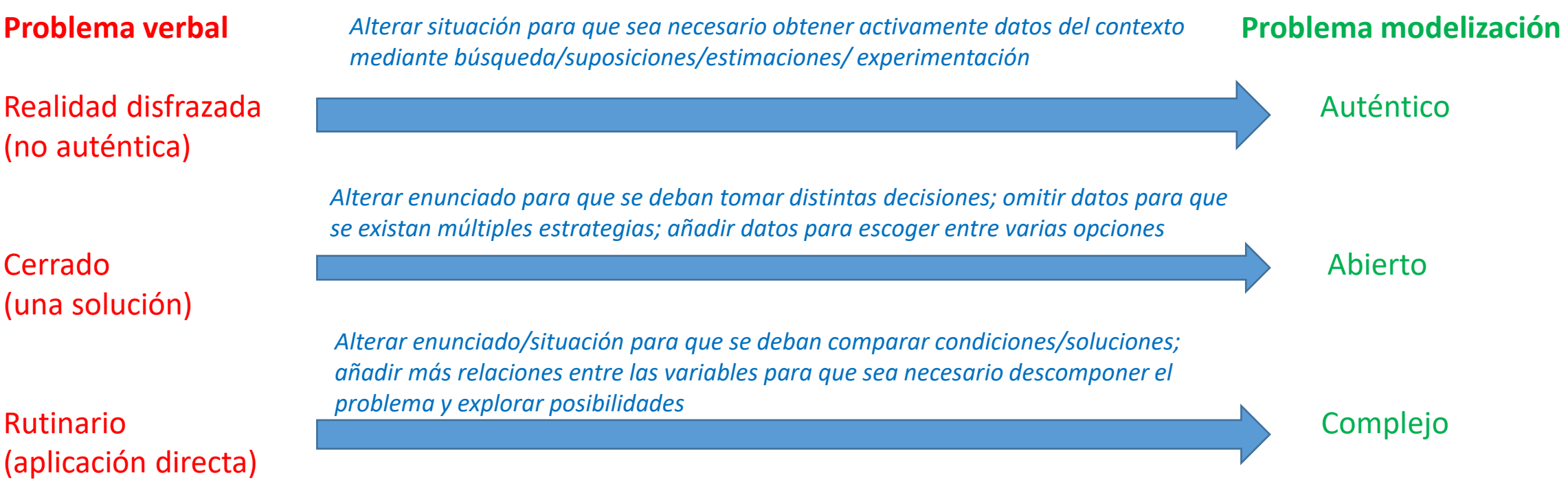
¡Así que esperamos que os sea útil!

Además de para identificar problemas, la caracterización AAC también es operativa para transformar enunciados de problemas verbales (típicos de los libros de texto) en enunciados de problemas de modelización, como veremos a continuación.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Podemos transformar enunciados de problemas verbales en enunciados de problemas de modelización mediante los siguientes procesos de transformación (Segura et al., 2026):



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Veamos un ejemplo: es sencillo transformar el Problema 2 (pelota) en un problema de modelización.

Si se elimina que tras cada salto la pelota alcanza un tercio de la altura anterior, obtenemos el siguiente problema:

Este problema ahora es auténtico (hay que obtener datos), es abierto (se puede abordar de distintas formas, la solución dependerá de las medidas o las estimaciones y suposiciones) y es complejo (hay subproblemas como el de la medida, representar los datos, ajustar una función, etc.).

Para enfrentarse al problema puede ser necesario utilizar instrumentos de medida de datos (altura de la pelota a lo largo del tiempo), por ejemplo grabando el bote y analizando el vídeo con algún software específico.

Se puede leer más sobre una tarea muy similar desarrollada y analizada por Ortega y Puig (2015) usando el software *Video Physics* y ajuste de funciones. Tenéis el artículo en las lecturas complementarias de este módulo.



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Otro ejemplo de variar problemas es el siguiente, que hemos recuperado del material desarrollado por el proyecto LEMA entre 2006 y 2009. En este caso comenzamos con una tarea y vamos a ver cómo podemos variar el grado de autenticidad, apertura y complejidad.

Tarea: Bombillas: variante A

La casa de María tiene 15 bombillas. Cinco de ellas son de bajo consumo, y el resto son normales. La tabla siguiente muestra el coste de tener ambos tipos de bombillas encendidos durante una hora.



Tipo	Potencia	Coste/hora	Vida media	Coste por bombilla
Estándar	60W	1,02 céntimos	1.000 hrs	70 céntimos
Bajo consumo	11W	0,187 céntimos	15.000 horas	4,50€

Si la familia de María utiliza cada bombilla una media de 4 horas por día durante la semana y 6 horas por día los fines de semana, ¿cuánto cuesta iluminar la casa durante un año?

En la Variante A aparece toda la información necesaria.

Puede que la situación sea realista (incluso auténtica) pero la tarea no es abierta y no es compleja.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Tarea: Bombillas: variante B

La casa de María tiene 15 bombillas: algunas son de bajo consumo y algunas normales. La tabla siguiente muestra el coste de tener ambos tipos de bombillas encendidos.



Tipo	Potencia	Coste/hora	Vida media	Coste por bombilla
Estándar	60W	1,02 céntimos	1.000 hrs	70 céntimos
Bajo consumo	11W	0,187 céntimos	15.000 horas	4,50€

¿Cuánto puede costar iluminar la casa de María?

En la Variante B se ofrecen algunos datos, pero son necesarias suposiciones para poder contestar a la pregunta.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Tarea: Bombillas: variante C

¿Cuánta energía puedes ahorrar utilizando bombillas de bajo consumo en una casa? La tabla siguiente muestra el coste de tener ambos tipos de bombillas encendidos durante una hora.



Tipo	Potencia	Coste/hora	Vida media	Coste por bombilla
Estándar	60W	1,02 céntimos	1.000 hrs	70 céntimos
Bajo consumo	11W	0,187 céntimos	15.000 horas	4,50€

La Variante C es todavía más abierta y compleja, ya que para resolverla, hay que tomar decisiones acerca de detalles del contexto.

Si los estudiantes no están familiarizados con la modelización, necesitarán ayuda en las tareas B y, sobre todo, en la C.

Por lo tanto, es recomendable implementar secuencias de tareas en apertura y complejidad crecientes, como A, B y C.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Ahora es vuestro turno: la primera tarea del Módulo 2 (también la tenéis disponible por separado en el Aula Virtual) consiste en transformar (de verbal a auténtico; de cerrado a abierto; y de rutinario a complejo) tres problemas de libro de texto en problemas de modelización adecuados para 1º ESO.

Tarea 3. Transforma los tres siguientes problemas del libro de texto (6º EP) en problemas de modelización adecuados para su implementación en 1º ESO. Debes mantener el contenido matemático original del problema.

Sube los enunciados (en docx, pdf, ppt, jpg, etc.) a la Tarea 1 Reformulación_ProblemasVerbales_ProblemasModelización del Aula Virtual.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Problema 1

ERES CAPAZ DE... **Hacer cálculos para el mantenimiento de una piscina**

En una escuela de natación están preparando la piscina para esta temporada.

La han llenado de agua y tienen que añadir cloro al agua para dejarla a punto y poder empezar las clases.

La piscina de la escuela tiene forma de ortoedro y mide 50 m de largo, 20 m de ancho y 2 m de profundidad.

En la escuela saben que deben poner 4 g de cloro por cada metro cúbico de agua de la piscina. El cloro lo compran en botes de 5 kg cada uno.

- ¿Cuántos metros cúbicos de agua tiene la piscina? ¿Cuántos kilolitros son?
- ¿Cuántos gramos de cloro deben poner en total en la piscina?
- ¿Cuántos botes de cloro tienen que comprar para prepararla? ¿Les sobrará algo de cloro?



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Problema 2

ERES CAPAZ DE...

Saber cuándo es rentable un abono

En el polideportivo municipal han abierto una piscina. Se puede ir a nadar pagando cada día una entrada diaria, pero las personas que van a menudo tienen otras opciones más baratas como sacar bonos de 10 días, sacar abonos mensuales o sacar un abono anual.

- Observa los precios de cada opción y calcula:
  - ¿Cuántos días hay que ir como mínimo para que resulte más barato sacar un bono de 10 días que sacar entradas diarias?
  - ¿Y para que resulte más barato sacar un abono mensual que entradas diarias? ¿Y para que resulte más barato sacar un abono anual?
- Explica qué opción aconsejarías a cada persona:
  - Raquel va a ir a la piscina 8 días.
  - Fran quiere ir 15 días este mes.
  - Juancho piensa ir 2 veces a la semana durante todo el año.



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Problema 3

ERES CAPAZ DE...

Aplicar la Estadística en el deporte

Emilio es entrenador de baloncesto. Su equipo está jugando un partido importante y en los últimos minutos tiene que hacer un cambio.

Tiene dos jugadores en el banquillo a los que puede sacar a jugar.

En sus estadísticas, Emilio tiene los puntos anotados por cada jugador en los últimos seis partidos:

Carpenter →	24	4	6	16	9	19
Mirovich →	13	11	12	14	12	10

- ¿Cuál es la media de puntos anotados por cada jugador? ¿Y el rango?
- ¿A qué jugador sacarías tú a jugar? Explica por qué.
- ¿Coincide tu respuesta con la dada por tu compañero?



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

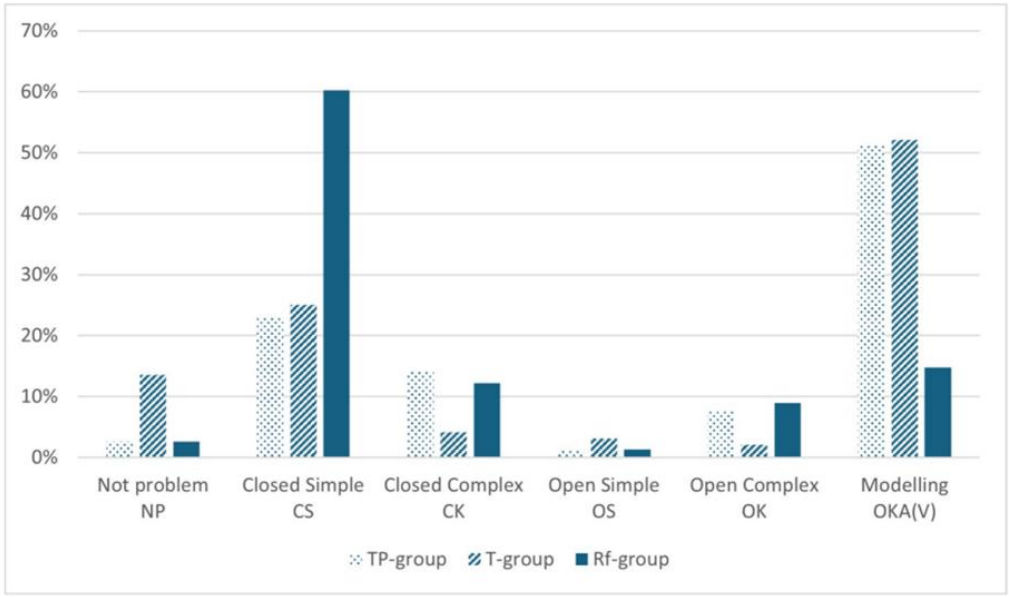
Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

¿Qué tal os ha ido con la Tarea 1_Reformulación_ProblemasVerbales_ProblemasModelización?

Transformar un problema verbal de libro de texto (contexto manipulado, cerrado y rutinario) en un problema de modelización (contexto auténtico, abierto y complejo) no es tan sencillo como podría parecer.

En Ferrando et al. (2025) encontramos que sólo un 14% de futuros maestros de Primaria que habían leído la parte de modelización del currículo (en la imagen, Rf-group) fueron capaces de transformar los tres problemas de la Tarea 1 en problemas de modelización.

Este porcentaje subió a algo más del 50% para aquellos futuros maestros que siguieron un curso de formación (TP-group) o que consultaron una guía didáctica que explicaba la caracterización AAC (T-group).



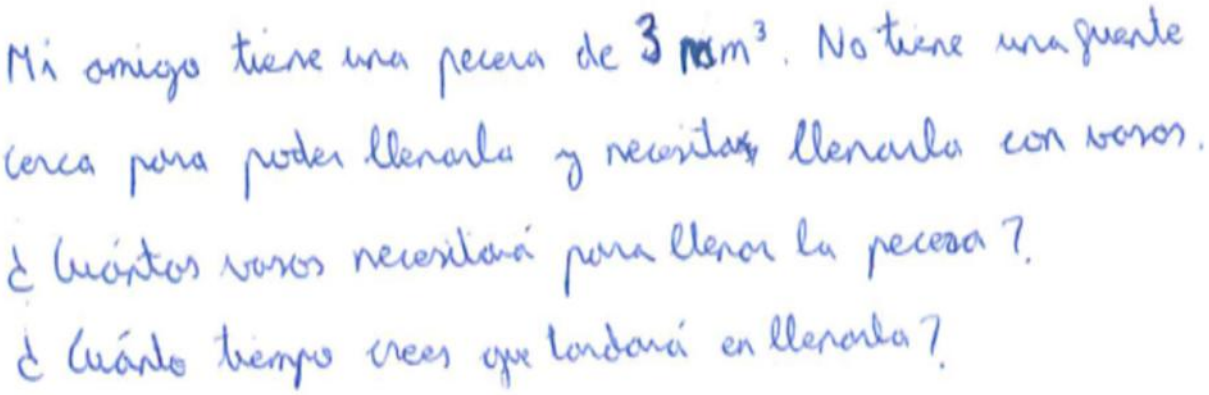
Al menos, ¡la formación funciona! Si tienes interés, el artículo completo está disponible en las lecturas complementarias.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Además, en Segura et al. (2026) identificamos algunos errores típicos cometidos por docentes de Primaria en formación al transformar los problemas de libro de texto en problemas de modelización:

a) Error al formular un contexto auténtico. Al transformar un problema de contexto manipulado en otro de contexto familiar para que los estudiantes experimenten u obtengan activamente datos, un error es facilitar algún dato incompatible con la realidad o plantear una experimentación inviable. Por ejemplo, aquí vemos un problema "de modelización" planteado en el que hay que experimentar con volúmenes a partir de una pecera, pero el dato de la misma es incompatible con la realidad (¡una pecera de $3mm^3$!).


Mi amigo tiene una pecera de 3 mm^3. No tiene una fuente cerca para poder llenarla y necesita llenarla con vasos. ¿Cuántos vasos necesitará para llenar la pecera? ¿Cuánto tiempo crees que tardará en llenarla?



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

b) Error al formular un enunciado abierto. Al transformar un problema cerrado en otro abierto mediante en procedimiento de añadir preguntas sobre tomar decisiones, un error es confundir la introducción de toma de decisiones basadas en datos (selección de datos relevantes e irrelevantes, suposiciones para ordenar en importancia, etc.) con problemas de decisión/opinión personal que no se fundamenta en razonamientos matemáticos, como en el ejemplo de abajo.

Mis notas en los ultimos 5 examenes son: 10, 7, 5, 4, 2
-¿Cuales crees que són los motivos por los que mis notas estan bajando tanto?
-¿Crees que deberia estudiar más? ¿Porqué?



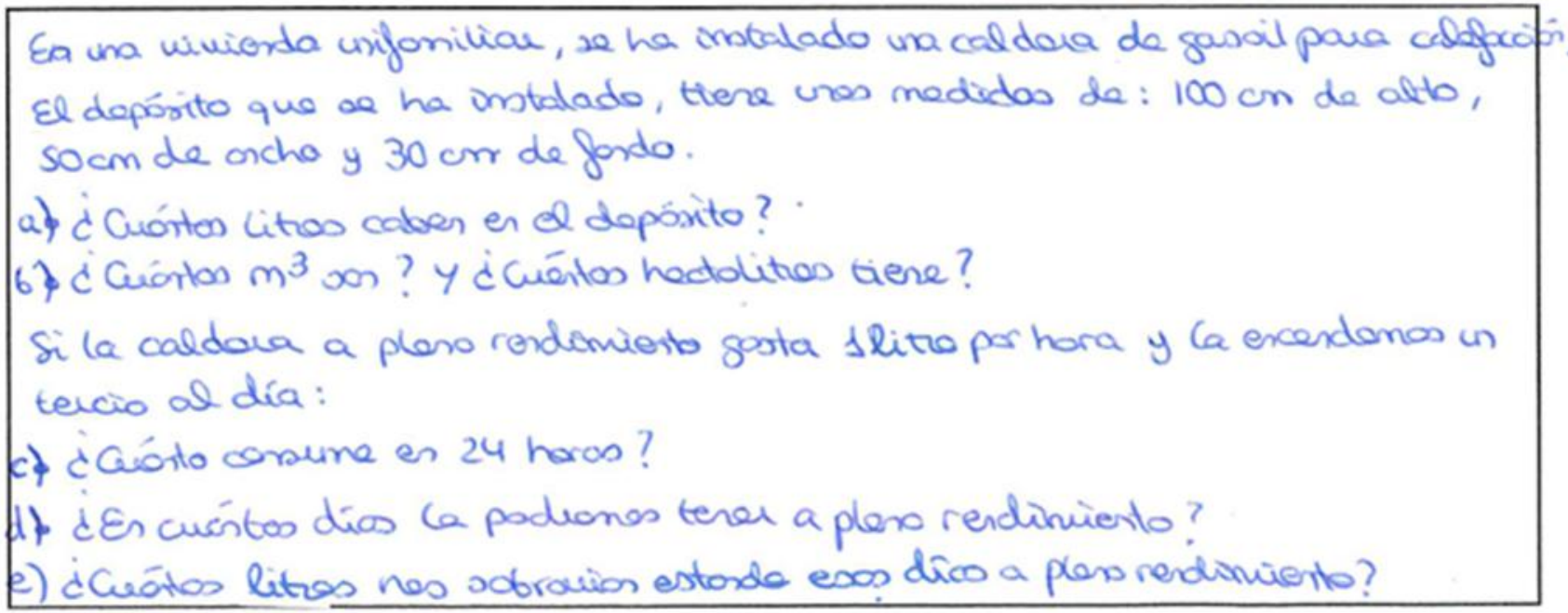
Por otro lado, un error al transformar un problema cerrado en otro abierto mediante el procedimiento de eliminar datos es que el nuevo enunciado quede completamente indefinido y, en consecuencia, que las aproximaciones al problema (distintas soluciones) sean arbitrarias, como en el ejemplo de al lado.

Una familia de 6 persones sol anar 3 voltes a la semana a la piscina, s'ha mudat i esta buscant una pisina en la qual li ixca mes rentable el preu.
Quina piscina trien?

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

c) Error al formular un problema complejo. Al transformar un problema rutinario en otro complejo mediante en procedimiento de añadir condiciones o de añadir relaciones entre las variables para tener que descomponer el problema en subproblemas, un error habitual es confundir estos procedimientos con añadir más preguntas simples de operación directa. Resolver más apartados rutinarios, como se observa en el ejemplo de abajo, no equivale a descomponer el problema en subproblemas y, por tanto, no conduce a un problema complejo.


En una vivienda unifamiliar, se ha instalado una caldera de gasoil para calefacción. El depósito que se ha instalado, tiene unas medidas de: 100 cm de alto, 50 cm de ancho y 30 cm de fondo.

a) ¿Cuántos litros caben en el depósito?

b) ¿Cuántos m^3 son? y ¿Cuántos hectolitros tiene?

Si la caldera a pleno rendimiento gasta 1 litro por hora y la encendemos un tercio del día:

c) ¿Cuánto consume en 24 horas?

d) ¿En cuántos días la podemos tener a pleno rendimiento?

e) ¿Cuántos litros nos sobrarían estando esos días a pleno rendimiento?



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 2. Caracterización de los problemas de modelización. Análisis del enunciado del problema

Los anteriores son errores que se pueden cometer cuando se acomete con cierto descuido la tarea de plantear problemas de modelización.

Acabamos esta sección con tres ejemplos de problemas de la Tarea 1 bien transformados usando la caracterización AAC.

Problema 1 transformado

El agua potable es un bien escaso y se desperdicia sin que nos demos cuenta. Por eso te propongo un pequeño reto: mide el volumen en cm^3 de la bañera de tu casa (si tienes) y di cuántos litros de agua puede contener. ¿Cuántos litros de agua utilizas cuando te duchas? Teniendo en cuenta el agua que utilizas cuando te lavas los dientes, el agua que bebes y el agua que utilizas cuando te duchas, ¿cuántos litros de agua utilizas al día? ¿Y cuántos litros al mes?

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Problema 2 transformado

Escoger la mejor oferta

Opción 1: Entrada + bocata 16,50€

Opción 2: Entrada + bebida 11,50€

Opción 3: Entrada + bebida + bocata 18€

Opción 4 (individual): Entrada 11€
Bebida 2,5€
Bocata: 6€

Opción 5: Bebida + bocata + 2 entradas 28€

Opción 6: 2x1 en entradas si compras 8 bocatas

Problema 3 transformado

La escuela está organizando una "Liga de Matemáticas" donde los estudiantes compiten en problemas matemáticos. Emilio, el organizador, necesita seleccionar a un estudiante para representar al equipo en la competición. Tiene que elegir entre dos estudiantes que han participado en los últimos 8 desafíos matemáticos.
¿Qué criterios podrías utilizar?
Basándote en esos criterios, explica en qué casos es mejor utilizar uno u otro, poniendo ejemplos.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Hemos visto que los problemas de modelización, según Maaß (2007), son auténticos, abiertos y complejos. Esta caracterización es una herramienta operativa para analizar los enunciados de problemas e identificar sin son problemas de modelización. También para reformular problemas verbales estándar (de libro de texto) en problemas de modelización.

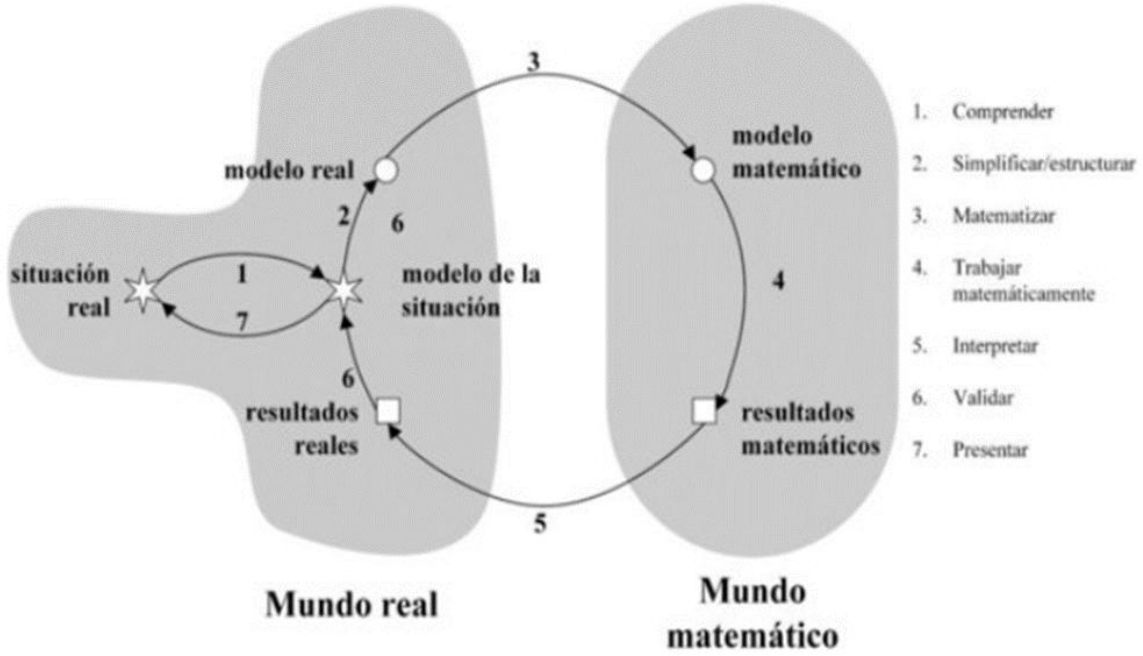
Pero los problemas de modelización pueden analizarse, además, **desde la perspectiva de la resolución**. La resolución de un problema de modelización implica el desarrollo de un modelo matemático. Un modelo matemático es el *entramado de variables, cantidades y relaciones entre ellas* que permiten describir matemáticamente una situación real y así poder realizar predicciones o tomar decisiones.

El proceso de desarrollar un modelo matemático es a menudo complejo y requiere varias iteraciones, por lo que se denomina **ciclo de modelización**. A continuación, explicaremos en qué consiste.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Existen distintas propuestas de ciclos de modelización, pero el más aceptado y completo es el de Blum y Leiß (2007), ampliado por Borromeo Ferri (2009). Se trata de un ciclo planteado desde una perspectiva cognitiva (identifica y clasifica el pensamiento del estudiante cuando está resolviendo un problema de modelización).



El ciclo de modelización pasa por **varias fases** de manera no lineal:

1) Se nos plantea una *situación real* con una pregunta que implica cierta reflexión ("¿qué se me está pidiendo?") La información puede ser incompleta o muy amplia, por lo cual tenemos que hacernos una situación mental de la situación. Para comprender la tarea tenemos que crear el *modelo mental de la situación*, con el que empezamos a intuir cuáles son los siguientes pasos, qué conozco y qué necesito conocer.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

2) Como continuación de la fase anterior, el siguiente paso es la construcción de un *modelo real* que simplifica y estructura el modelo mental de la situación. Simplificar y estructurar significa descartar lo superfluo, identificar y acotar las características o variables relevantes, formular conjeturas o hipótesis sobre los aspectos desconocidos o no determinados, y establecer relaciones entre dichas variables que pueden ser necesarias para describir la situación adecuadamente.

3) La siguiente fase es matematizar el modelo real para transformarlo en un *modelo matemático*. La matematización del modelo real significa cuantificar las variables identificadas para convertirlas en signos o representaciones matemáticas (cantidades de magnitud, variables algebraicas, formas geométricas, etc.), así como formalizar las relaciones entre dichas variables (división de medidas, correspondencia entre variables, funciones, etc.).

4) Una vez construido el modelo matemático, la solución del problema implicará trabajar matemáticamente sobre este modelo: fijar una incógnita, resolver ecuaciones, dar valores a una función, calcular áreas, estimar medidas, etc. Se trata de trabajar los procedimientos matemáticos sobre la estructura de conceptos matemáticos del modelo con el fin de construir una solución o unos *resultados matemáticos.*

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

5) La siguiente fase es interpretar el resultado matemático (un número, un intervalo, una función, una expresión algebraica, etc.) que se ha obtenido mediante la manipulación del modelo matemático, con el fin de obtener unos *resultados reales*. Esto es, la solución matemática tiene una lectura dentro del modelo real y de la situación planteada por el problema, y es esta interpretación el sentido real de la solución del problema.

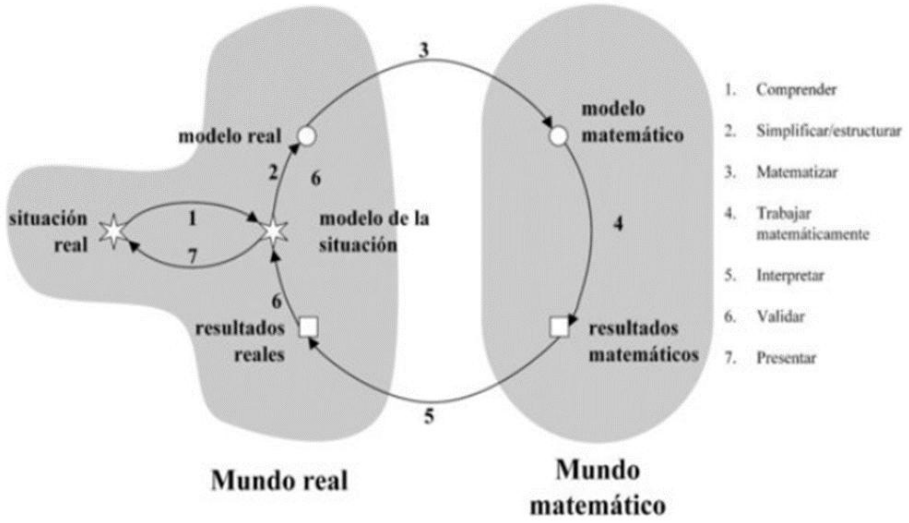
6) Dado que el problema plantea una pregunta o reto sobre una situación auténtica, los estudiantes tendrán que validar los resultados reales proporcionados por la solución al modelo matemático, contrastándolos con el modelo real y la situación mental de partida: ¿Tiene sentido el resultado obtenido según la situación que me había construido de partida? ¿Invalida el modelo inicial o es compatible con este? ¿Hay datos reales para que pueda contrastar mis resultados? ¿Puedo mejorar la respuesta? Si fuera así, se iniciaría una nueva iteración del ciclo de modelización, formulando nuevas hipótesis o modificando las previas, con la finalidad de perfeccionar el modelo.

7) Por último, los estudiantes deben presentar, esto es, comunicar su modelo matemático y los resultados obtenidos.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Veamos un ejemplo de resolución de problema de modelización analizado, fase a fase, a través del ciclo de modelización.



¿Cuánto mide el gigante del Parque del Gulliver?



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

¿Cuánto mide el gigante del Parque del Gulliver?



Comprensión, simplificación y estructuración:

1) Entiendo que me preguntan por la altura. La figura es muy grande, no soy capaz de decir una medida verosímil, necesito razonar por partes.
2) Voy a suponerlo de pie, y que tiene la configuración física de un hombre estándar en España.
3) Veo niños al fondo, y de hecho yo jugué de niño allí, recuerdo el pulgar algo más alto que una persona.
4) El pulgar puede ser determinante para estimar la altura, voy a suponer razonablemente que existe una relación lineal entre la longitud del pulgar y la de la altura sin grandes variaciones entre hombres.

Matematización:

1) Basándome en mi recuerdo, es verosímil estimar la longitud del pulgar del Guilliver como algo más de 2 metros, pongamos 2,5 metros.
2) Voy a seleccionar a cinco hombres y a medir su longitud del pulgar (5,9 cm; 6 cm; 6,5 cm; 7 cm; 6,5 cm) y su altura (171 cm, 182 cm, 175 cm, 190 cm, 178 cm) para acercarme a estas medidas en un hombre estándar.
3) La razón entre altura y longitud de un hombre estándar debe ser igual a la estas medidas en el Gulliver.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

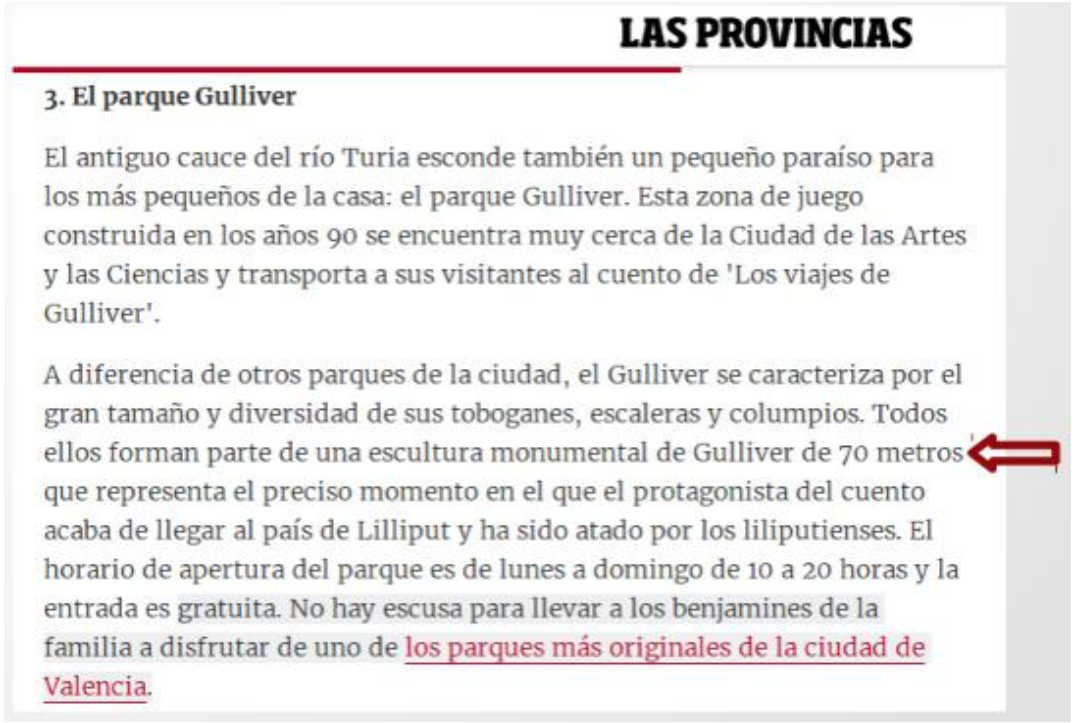
Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Trabajo matemático:

1) Calculo la longitud del pulgar de un hombre estándar a partir de la media aritmética de las cinco longitudes obtenidas, Lp = 6,4 cm.
2) Calculo la altura de un hombre estándar a partir de la media aritmética de las cinco alturas obtenidas, A = 179 cm.
3) Calculo la razón entre ambas medidas: A/Lp = 28 (¡estoy midiendo a una persona en pulgares!)
4) La razón será la misma en el Gulliver: 28 = A/2,5 → A = 28*2,5 m = 70 metros.

Interpretación y validación:

1) Si Gulliver se pusiera de pie, mediría unos 70 metros de altura.
2) Para validar, trato de buscar información con la que contrastar mi estimación.
3) Efectivamente, encuentro una noticia que confirma que mis estimaciones y razonamientos eran correctos, por lo que no necesito revisar el modelo.



LAS PROVINCIAS

3. El parque Gulliver

El antiguo cauce del río Turia esconde también un pequeño paraíso para los más pequeños de la casa: el parque Gulliver. Esta zona de juego construida en los años 90 se encuentra muy cerca de la Ciudad de las Artes y las Ciencias y transporta a sus visitantes al cuento de 'Los viajes de Gulliver'.

A diferencia de otros parques de la ciudad, el Gulliver se caracteriza por el gran tamaño y diversidad de sus toboganes, escaleras y columpios. Todos ellos forman parte de una escultura monumental de Gulliver de 70 metros que representa el preciso momento en el que el protagonista del cuento acaba de llegar al país de Lilliput y ha sido atado por los liliputienses. El horario de apertura del parque es de lunes a domingo de 10 a 20 horas y la entrada es gratuita. No hay escusa para llevar a los benjamines de la familia a disfrutar de uno de los parques más originales de la ciudad de Valencia.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Observaciones:

- El ciclo no es un algoritmo lineal: pueden haber saltos entre las fases, o idas hacia delante y hacia atrás entre las fases.

- Puedes recorrer varias veces el ciclo para encontrar una solución satisfactoria (la validación de los resultados juega en esto un rol clave).

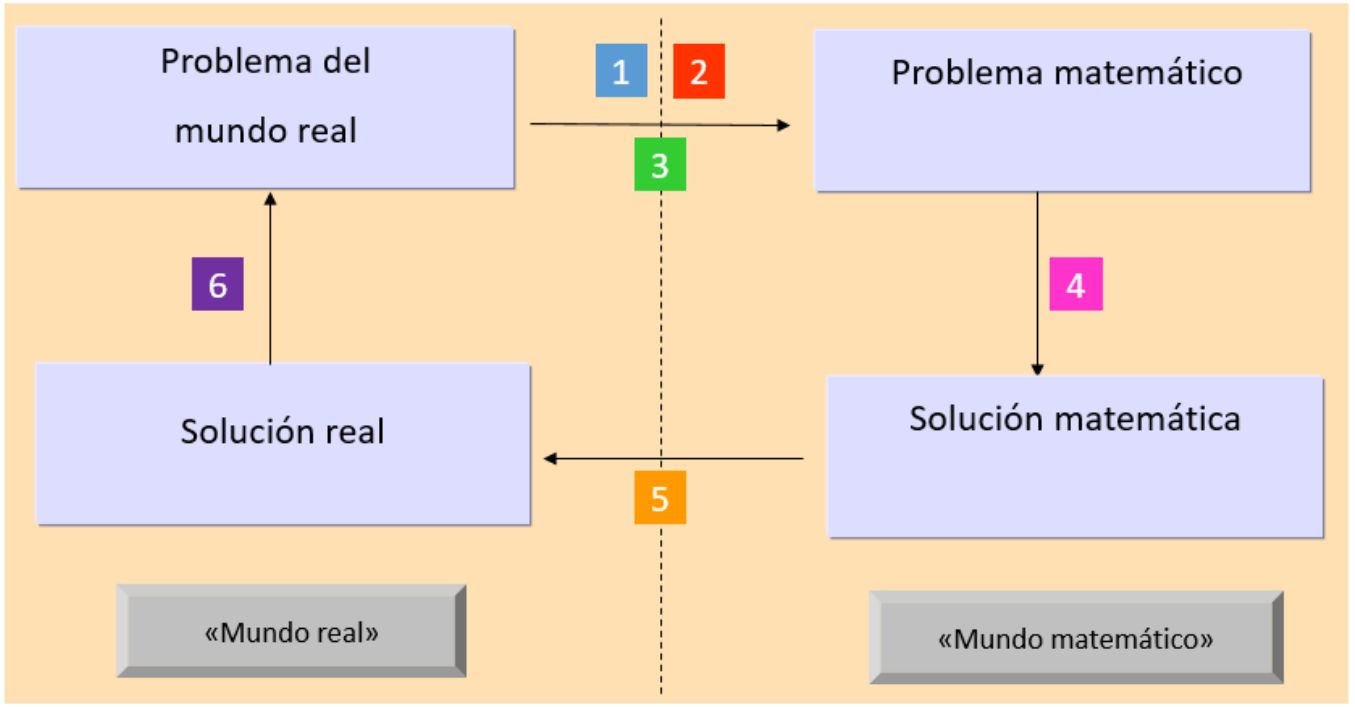
- En las tareas de modelización hay más de una solución, que depende de las decisiones que se toman durante el ciclo.

- Estas decisiones son inseparables de la experiencia subjetiva del resolutor, porque implican conocimiento extra matemático, etc.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Otra manera alternativa de presentar el ciclo es centrarse solamente en los procesos de resolución. Se obtiene un ciclo más sencillo, como el siguiente, utilizado en los estudios PISA (2003).



1. Lectura y comprensión de un problema de la realidad
2. Organización del problema mediante conceptos matemáticos
3. Hipótesis, formalizaciones para transformar el problema del mundo real en un problema matemático
4. Resolución del problema matemático
5. Traducción de la solución matemática en términos de la situación real
6. Validación de la solución real obtenida

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Vamos a analizar otra resolución de problema utilizando este ciclo de modelización. Ahora pensemos en cómo resolveríamos la siguiente tarea, que plantea una situación que ha quedado ya vintage, pero que ilustra como las noticias también pueden inspirar problemas de modelización.

El 25 de abril de 2006, el partido español en la oposición presentó en el Congreso 4.000.000 firmas contra una nueva ley promulgada por el gobierno.





Todos los periódicos españoles publicaron fotos de las grandes cajas y las 10 furgonetas que se habían necesitado para transportar las hojas de papel al Congreso. **¿Crees que esta puesta en escena tenía una intención política o que todas estas cajas y furgonetas eran realmente necesarias para transportar los cuatro millones de firmas? Da una respuesta razonada.**

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Nota: se requiere conocimiento extramatemático para hacer suposiciones y estimaciones de las dimensiones de las cajas, de las dimensiones de paquetes de folios de 500, de cuántas firmas se distribuyeron por folio, de las dimensiones del maletero de las furgonetas, etc.

Este es un ejemplo de análisis esquemático de una posible resolución de la tarea de las firmas a través del ciclo propuesto por el proyecto PISA



Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

El siguiente paso es que realicéis vosotros el análisis de una resolución a un problema de modelización. Para ello, os planteamos la Tarea 2 de este módulo (la podéis encontrar separada en el Aula Virtual).

Tarea 4. Escoge **uno** entre los problemas de modelización de la *Tarea 2_Identificación de problemas de modelización* (Módulo 1) o de los problemas de modelización que has formulado en la *Tarea 3_Reformulación_ProblemasVerbales_ProblemasModelización* (Módulo 2), el que prefieras.

Resuélvelo y, luego, analiza tu resolución mediante el ciclo de modelización (como en el ejemplo del Gulliver o en el de las firmas).

Sube tu análisis (en docx, pdf, ppt, jpg, etc.) a la **Tarea 4 Análisis_cicloModelización** del Aula Virtual.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Para finalizar, aunque brevemente, conviene abordar otra perspectiva de análisis: **el ciclo de modelización como herramienta de aprendizaje**.

En efecto, más allá del uso de ciclo para analizar las resoluciones de los estudiantes, podemos darle un **uso metacognitivo,** esto es, como guía para la actividad de los propios estudiantes:

- El docente muestra el ciclo al alumnado y explica sus fases, aplicándolo a varias tareas de modelización que sirven como ejemplo.

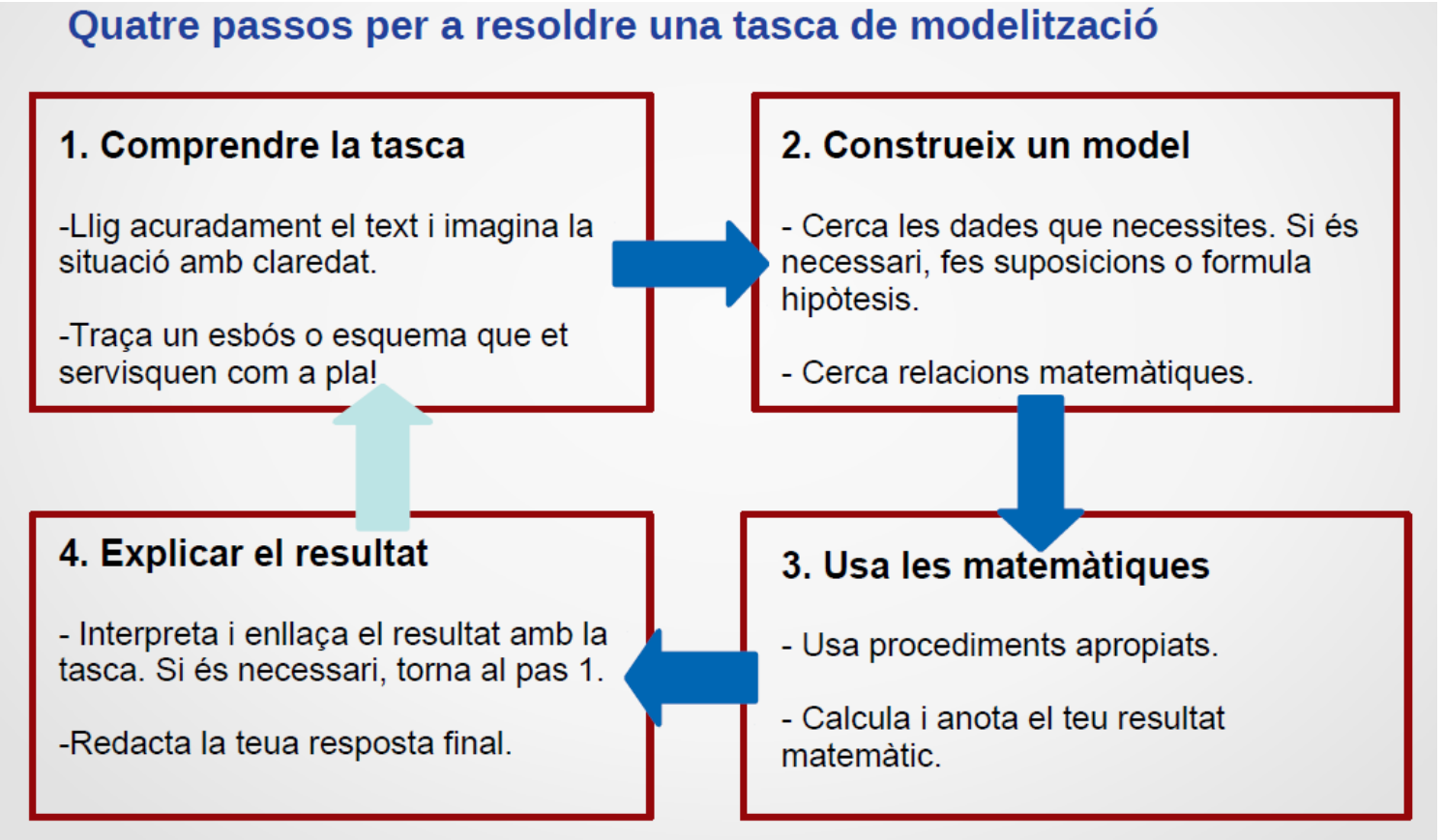
- Los estudiantes aprenden el ciclo y resuelven tareas de modelización reflexionando sobre sus propios procesos a través del ciclo.

- Los estudiantes pueden emplear el ciclo como “guía” que los indica en qué aspectos tienen que reparar en cada momento.

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Diferentes investigaciones han mostrado que cuando se usa el ciclo de modelización como instrumento de aprendizaje del alumnado, es mejor utilizar un **ciclo simplificado en cuatro fases**. Por ejemplo, el del proyecto DISUM (Blum & Leiss, 2007) está preparado como un "plan de solución" para que los estudiantes lo utilicen como guía para orientarles durante la resolución de problemas de modelización:



Esquema adaptado de Blum y Leiss (2007)

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

En síntesis, hay cuatro principales razones que justifican por qué el ciclo de modelización tiene que formar parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática:

1) Permite a los estudiantes entender qué significa la modelización matemática (¿Qué significa?).

2) Da a los estudiantes orientaciones dentro de su propio proceso de modelización (¿Dónde estoy en el proceso?)

3) Permite a los estudiantes reflexionar retrospectivamente sobre su proceso de modelización (¿Qué fases he recorrido y qué fases he olvidado?)

4) Sirve al profesorado como un instrumento de análisis y evaluación del trabajo del alumnado en problemas de modelización (¿Qué competencia en modelización han desarrollado?)

Módulo 2. Análisis de problemas de modelización y de sus soluciones

Sección 3. Ciclo de modelización. Análisis de las soluciones al problema

Y hay variados argumentos que apoyan la introducción de la competencia específica en modelización matemática (CE3 en los Decretos 107/2022 y 108/2022) y los problemas de modelización en los currículos españoles (y del resto del mundo).

- Pragmático: para comprender mejor el mundo real.
- Formativo: permite introducir conceptos matemáticos curriculares.
- Cultural: para entender bien qué son las matemáticas es necesario conocer y experimentar su relación con el mundo real.
- Psicológico: los ejemplos basados en el mundo real puede contribuir a motivar a los alumnos puesto que dan sentido a conceptos abstractos en un contexto próximo.

O como señala Morten Blomhøj (2004):

1. La modelización matemática tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria.

2. En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia. Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada.

3. Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes en el funcionamiento y formateado de sociedades basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas y seculares en criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático.

Módulo 1. Contextos reales y modelización matemática en el currículo

Bibliografía

Blum, W., & Leiss, D. (2007). “Filling Up”—The problem of independence- preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), Proceedings of CERME 4 (pp. 1623–1633). ERME.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.

Ferrando, I., Barquero, B., & Segura, C. (2025). Does training matter? Effect of training strategies on how pre-service teachers pose and assess modelling problems. *ZDM–Mathematics Education, 57(2*), 275-288.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagtis, Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn. Mathematical modelling: Education, engineering and economics, 63-78.

Niss, M., & Blum, W. (2020). The learning and teaching of mathematical modelling. Routledge.

Segura, C., Ferrando, I., Gallart, C. & Barquero, B. (2026, in press). Pre-service teachers posing modelling problems: analysis of strategies and errors*. Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*.